BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
D
83
NAPOLI

Digitized by Google

F L O R E S
G E O M E T R I C I
EX RHODONEARUM,
ET
CLOELIARUM
Curvarum deſcriptione reſultantes,

QUOS

Unà cum novi expeditiſſimi MESOLABII auctario,

ILLUSTRISS. ATQUE EXCELLENTISS. DOMINAE

D. C L OE L I AE
GRILLO-BORROMEAE
COMITISSAE CLARISSIMAE, AC DOCTISSIMAE,

In obſequii ſui, & venerationis argumentum

D. D. D.

D. GUIDO GRANDUS
ABBAS S. MICHAELIS IN BURGO PISARUM,

Et in Accademia Piſana publicus Matheſeos Profeſſor.

FLORENTIAE. MDCCXXVIII.

Typis Regiae Celſitudinis. Apud Tartinium, & Franchium

Superiorum Approbatione.

B. R.
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI
Digitized by Google

Digitized by Google

Excellentiſſima, & Clariſſima Domina.

DUM amoeniſſimos Geometriae hortos perluſtrarem, aliquot inde Flores per otium mihi delegi, *Rhodoneas* nuncupatos, quos attentius contemplans, neſcio quae Naturae myſteria in illis latere ſum ſuſpicatus. Eorum exiguum manipulum, qui prima hujus ſcripti parte comprehenditur, ſpeciminis loco, doctiſſimae ſapientum Virorum Accademiae, ad naturalem ſcientiam promovendam apud

toto diviſos orbe Britannos

Digitized by Google

inſtitutae, dudum obtuli, quae ita illos pro ſua erga me humanitate, probavit, ut Actis ſuis inſeruerit, ac typis vulgatos *in Tranſactionibus Julii, & Auguſti* 1723. *num.* 378. Poſteritati tranſmiſerit. Cùm verò nonnullos Amicorum meorum ea cupido inceſſiſſet, ejusmodi Flores propius contemplandi, quorum deſideriis ut fieret ſatis, italicis proelis lucubrationem illam iterum expreſſam vulgare opus erat, eandem altera parte cumulare decrevi, ut major eorum copia deſiderium expleret, ſimulque varietas faſtidium averteret. Itaque aliam Florùm ſpeciem, non in plano, ut antea, jacentium, ſed per ſolidam ſuperficiem ſua folia expandentium iiſdem ex hortis decerpere auſus ſum, quos cum Muſae omnes, per ambulacra iſtiuſmodi viridarii mihi obviae, CLOELIAS vocari, ſummo conſenſu, retuliſſent, exilii, fateor, ad tam auguſti Nominis memoriam,

nec

nec dubitavi, Aonidas ipſas Excellentiae Tuae nomen illis inſcribere voluiſſe, ut opportunam mihi occaſionem, mea Tibi obſequia, quod dudum in votis erat, teſtandi, exhiberent. Alacrior itaque hinc factus, duplicique Florum manipulo jam inſtructus, me Tibi ſiſtere non dubitavi, haud inanem fiduciam fovens, ejuſmodi Flores, non caducos, & brevi temporis ſpatio marceſcentes, quales qui ornando ſinui deſtinantur, ſed ſuapte natura, ut Veritatum Geometricarum conditio poſtulat, quae menti dumtaxat illuſtrandae, ac recreandae inſerviunt, perpetuos, & immortales, ſuaeque elegantiae venuſtate numquam privandos, Tibi utique non ingratos futuros: quippe quae, ſupra tui ſexus genium, & ſortem evecta, hiſce ſtudiis maximè delectaris, alteram nobis Hyppathiam Theonis filiam referens, quae acutiſſimos in Apollonii Conica, & in Diophanti

Alge-

Algebram Commentarios conſcripſiſſe dicitur; niſi quòd tantò admirabilior cenſenda ſit tua Virtus, quantò nobiliori conditione illi praeſtas. Per Te enim non qualemcunque, ſed Principem Foeminam, Philoſophiae, ac Geometriae myſteriis apprimè excultam, omnes miramur, ac ſeveriores diſciplinas in Aulam deliciis omnibus affluentem, imò in ſecretiora illius penetralia tandem admiſſas, Comites tuas, & Contubernales perpetuas factas, in praecipuis negociis conſilio, in genialibus colloquis jucundiori condimento, miniſtras adhibitas, ingenti cum gaudio, & voluptate ſuſpicimus. Quod ſi celebrem illam Romanam Virginem Cloeliam cognominem tuam tot laudibus cumulavit antiquitas, cùm ſe, & alias puellas obſides Porſennae Etruſcorum Regi à Romanis commiſſas, audaci molimine in libertatem vindicans, eluſis cuſtodibus, ac inter

ter hoſtium tela Tybri tranato, ſoſpites, & incolumes Patriae reſtituit: quod generoſum facinus *ſupra Cochlites, Mucioſque* mirandum eſſe, Livio teſte, Porſenna ipſe judicavit, aliorumque obſidum ceſſione Virginis ejuſdem optioni relicta, remunerandum decrevit: Romani verò *novam in Foemina Virtutem, novo genere honoris, ſtatua equeſtri donavere*. Quid Tibi, Excellentiſſima Domina, rependere non deberet Litteraria Reſpublica, pro ingenuis Artibus, ac Diſciplinis ad dignitatem priſtinam revocatis, tam nobili ſede, ac ſplendido contubernio receptis, tam potenti, ac generoſo Patrocinio munitis? Rarus namque, quod maximè dolendum eſt, apud Magnates ſublimiorum ſcientiarum cultus eſſe conſuevit: in muliebri autem ſexu adhuc rarior, ac planè inuſitatus: quod Foeminas verò Principes ea cura tangat, rariſſimum, & miraculi ad inſtar omnium

admi-

admiratione dignum jure, meritoque cenſeri poteſt. Hanc ergo foelicitatem Mathematicae, ac Philoſophiae, & omnigenae demum Eruditioni gratulari nunc licet,quam longum in aevum manſuram, tuoque in primis exemplo, perenni tandem conſuetudine, nobiliſſimas inter Matronas firmandam optamus, & auguramur. Vale Inſubriae noſtrae, tuaeque Liguriae, imò Italiae univerſae Decus eximium, ac tui Sexus, noſtrique Saeculi ſingulare ornamentum.

AL REVERENDISS. P. ABATE

D. GUIDO GRANDI

Per la ſua dottiſſima Opera de' Fiori Geometrici

SONETTO.

CHi vuol veder quantunque Arte, ed Ingegno
Poſſon tra noi, della Natura al pari,
Miri queſt' Opra, e da queſt' Opra impari
Tutto l'arcano ſuo, tutto il diſegno.
Ella geloſa, e di grandezza in ſegno,
Teſſeva i Fior sì vaghi, e a noi sì cari,
Celando altrui, con modi occulti, e rari,
E linea, e centro, e cerchio, ond'han ſoſtegno.
Archimede novello ai tempi noſtri,
GUIDO Immortal, de' ſuoi ripari a ſcherno,
Nuova luce dei Fior ſparſe ſu gli oſtri.
Onde, la ſua mercè, s'io ben diſcerno,
Fia che vinta da lui Natura, moſtri
Svelati i Fiori, e il ſuo gran nome eterno.

In ſegno di diſtintiſſima ſtima
Marco Antonio de' Mozzi Canonico Fior.
e Lettor Pubblico nello Studio di Firenze.

Digitized by Google

Praecedentium Hetruſcorum Carminum

ILLUSTRISS. ET REVERENDISS. D.

D. CANONICI MOZZII

LATINA VERSIO

ECHESTRATI AMATUNTII P. A.

TESSERADECASTICON.

SI quis neſcit adhuc cognoſcere, quanta ſit Artis
Vis, qua Naturae tam nava ſit aemula, Librum
Hunc legat, artis opus; ſciet hoc penetrare magiſtro
Naturae latebras, ac rerum diſcere cauſſas.
Magna Parens variis pingebat Floribus arva,
Multiplici qui dote placent: ſed mille figuras,
Queis Florum genus omne viget, ſtudioſa tegebat:
Linea mortales, centrumque latebat, & orbis.
GUIDO, Syracuſii ſenis & ſucceſſor, & haeres
Nunc circumfuſas, mira vi, diſſipat umbras,
Spargens luce nova Florem, qui fulget in oſtro.
Atque ſit hinc, vana niſi fallor imagine, Flores
Ut pateant, victis Naturae legibus arte,
Nomen & Artificis volet immortale per Orbem.

All'

All' Illuſtriſs., e Reverendiſs. Sig. Canonico

MARCO ANTONIO DE' MOZZI

RISPOSTA

DELL' AUTORE DI QUEST'OPERA.

SONETTO.

NON può, MOZZI gentil, l'arte, e l'ingegno
Tanto d'induſtria oprar, che giunga al pari
Dell' opre di Natura, e tutto impari
Di sì gran Madre l'ordine, e 'l diſegno.
Qualche barlume ſolo, e oſcuro ſegno
Traſparir laſcia a' ſuoi più fidi, e cari,
E lor gli ſtami addita, or denſi, or rari,
Con cui da forma ai Fior, vita, e ſoſtegno.
La nuova Idea però de' Fiori noſtri
Scherzo è ſol di mia mente: onde a me ſcherno
Temea recaſſe, e di vergogna gli oſtri.
Ma, tua mercè, già franco or mi diſcerno,
Se approvi l'Opra, ed il mio nome moſtri,
Più che nei Fior, ne' tuoi bei carmi eterno.

Praecedentis Reſponſionis

REVERENDISSIMI

P. ABBATIS GRANDI

LATINA INTERPRETATIO

ECHESTRATI AMATUNTII P. A.

TESSERADECASTICON.

NON ea vis Arti, non is vigor, inclyte MOZZI,
Poſſit ut illa ſuis conatibus aemula, rerum,
Quas Natura parit, veras attingere cauſſas,
Et quo conſilio, quo ſe gerat ordine, noſſe.
Lux obſcura quidem fidis, chariſque Minervae
Ingeniis quandoque micat, panditque micando,
Quàm modo ſit denſis, modo raris condita filis
Tela, decus formae dans Floribus, atque vigorem.
At mentis noſtrae luſus tantùm eſt nova Florum
Haec ſpecies, quae facta gravis ne cauſſa pudoris
In me conjiceret riſuſque, jocoſque, timebam.
Sed, duce te, videor, MOZZI, teque auſpice, tutus,
Haec dum Scripta probas Muſa plaudente; tuaque
Laude magis, quàm Flore meo, per ſaecula vivam.

PRAE-

PRAEFATIO

BENEVOLO LECTORI.

Cum in Diario Eruditorum Italiae, quod Venetiis imprimitur, Tom. xxxvii. pag. 410. *mentio facta eſſet hujus meae jucundae Exercitationis* de Floribus Geometricis,*quae inTranſactionibus Philoſophicis Anglicanis edita erat, nonnullos cupido invaſit, illos propius contemplandi, ut quid rei eſſent, per ſe cognoſcerent. Congruum igitur eſſe ratus, ut illorum deſideriis, uberius etiam, quam optaſſent, facerem ſatis, ejuſmodi Opellam italicis typis excudendam curavi, ſed tum variis Scholiis, & Adnotationibus locupletatam, quae diverſo charactere hic exprimuntur, ut ab iis, quae in priori editione prodierant, diſtinguantur, tum etiam ſecunda Parte auctam, quae Flores aliquot in ſuperficie ſpherica deſcriptos exhibet*, Cloelias *mihi nuncupatos, ut qui in plano deſignati, ac priori parte jam dudum expenſi*, Rhodoneae *dicebantur. Praeterea novum* Meſolabum *in Appendicem conjeci, quod ſua facilitate, & elegantia commendandum*

dandum

dandum Docti Viri judicarunt; Atque haec omnia Excellentiſſimae, Doctiſſimaeque Comitiſſae CLOELIAE GRILLO-BORROMEAE nomine inſcripta volui, licet primam partem Doctiſſimis Collegis Regiae Societatis jam dicaverim: nec enim extra conſuetudinem eſt, ut novae Librorum editiones novis Patronis offerantur, praeſertim ubi pluribus additamentis ita Libri facies, ac diſpoſitio fuerit immutata, ut novus Liber jure cenſeri poſſit. Ne tamen priorem illam Nuncupatoriam quis deſideret, aut in Anglicis Tranſactionibus quaerere cogatur, illam hic ſtatim inſerendam, tuiſque oculis repraeſentandam curavi. Vale.

Epiſtola editioni Londinenſi praevia ad R. S. Academicos.

SUos Geometria hortos habet, in quibus aemula (an potius magiſtra?) Naturae ludere ſolet, ſua ipſius manu Flores elegantiſſimos ſerens, irrigans, enutriens, quorum contemplatione Cultores ſuos quandoque recreat, ac ſumma voluptate perfundit: Hos inter, bonis avibus, & ipſe quondam admiſſus, nonnullos decerpſi Flores, vario frondium numero coronatos, quandoque & infinitis foliis, ſibi per innumeros gyros circum, & ſuperpoſitis, elegantiſſimè com-

compactos, quorum exiguum hunc ſaltem manipulum vobis, Viri Clariſſimi, offerre ſtatui, ut meum vobis obſequium aliquo argumento teſtatum facerem. An Naturae induſtria ſimili fortaſſe artificio Florum, Fruticum, Arborum folia conſtruere ſatagat, tali proportione ſucci nutrititii motum temperans, ac dirigens, ut eadem frondium figura dimanet, quales in variis ejuſmodi Florum Geometricorum foliis, juxta varias leges, quibus deſcribuntur, obſervare licet, Philoſophis diſcutiendum, ac decidendum relinquo, praecipuè verò ſolertiſſimis Naturae indagatoribus, qui, Magni NEWTONI exemplo, naturales leges ex profundioris Geometriae principiis repetendas ſibi meritò perſuadent, quibus utique illuſtriſſimus Coetus veſter, prae aliis, maximè abundat. Valete.

In

In utramque Operis partem

DUBENI ERIMANTII P. A.

EPIGRAMMA.

Multiplici ſe fronde aperit Rhodonea, *& in orbem*
Spargitur, in planam fuſa ſuperficiem.

Cloelia *ſed ſummo deſcendens vertice ſpherae,*
Per ſolidum ſerpens, itque, reditque locum.

Illa magis Florem, Fructum iſta referre videtur,
Dum referat frondes illa, ſed iſta lobos.

Quis Geometrarum ſteriles jam dixerit hortos,
In quibus exuberat Flos, neque Fructus abeſt?

FLO-

Digitized by Google

FLORES GEOMETRICI.

GEOMETRICOS FLORES generatim appello quaslibet Figuras, curva quadam, per aliquot foliorum ambitum, ab uno centro ſeſe expandentium, deducta, circumſcriptas: quales exhibent figurae, vel in plano jacentes. (*fig.* 1. 2. 3. 4. 5. 13.) vel in curvam ſuperficiem expanſae (*fig.* 32. 33. 34.) Quos quidem *Flores*, pro numero foliorum, *bifolios*, *trifolios*, *tetrafolios*, *pentafolios*, *exafolios*, *&c.*

(adde &, methodi gratia, *unifolios*) nominare licebit. Cum porrò innumeris modis ejuſmodi Flores generari poſsint, duas dumtaxat ipſorum geneſes pro nunc exponere juvabit, quarum altera *Rhodoneas*, altera *Cloelias* nobis exhibent; de quibus eſto.

PARS PRIMA

DE RHODONEIS

Definitiones.

I. RHodoneae Curvae ſunt, quae per terminos incedunt infinitorum ramorum ab eodem centro prodeuntium, aequalium autem ſinubus angulorum in data aliqua ratione reſpondentium angulis, quos ipſi rami cum recta poſitione data comprehendunt.

II. Et coſtans illa angulorum ratio Rhodoneae ipſius Ratio propria appellatur.

III. Simplex Rhodonea eſt quae unica perficitur circulatione. Duplex quae duplici. Triplex quae triplici; atque ita deinceps

Itaque ad Rhodonearum deſcriptionem, aſſumpto quolibet circulo, cujus centrum C, & ducto ubilibet radio CD (*fig.* 6. 7.) ad radium poſitione datum C A utcunque inclinato, ſi fiat angulus G C A ad angulum D C A, ſive arcus G A ad D A in qualibet conſtanti ratione *b* ad *a*, ductoque ſinu G H, fiat C I aequalis G H, erit punctum I ad Rhodoneam ipſius datae rationis *b* ad *a*. Et ſiquidem omnia Rhodoneae folia unica circulatione comprehendantur, ut primae quatuor figurae exprimunt, Rhodonea ſimplex erit: ſin verò duplicem, aut triplicem circulationem exigat perfecta omnium Rhodoneae foliorum deſcriptio, ipſamet Rhodonea duplex, aut triplex appellabitur; atque ita porrò, juxta numerum circulationum.

Simpliciorem, magiſque expeditam cujuſvis folii Rhodoneae deſcriptionem infra dabimus in corollariis Propoſitionis XII. Cui adde, concipi poſſe Rhodonearum geneſim ex duplici motu pendere: altero aequabili radij C A circulariter moti circa centrum C,

altero autem puncti C, per ipſum radium alternis vicibus aſcendentis, & deſcendentis, talibus viribus ſollicitati, quae ſint, ut ſinus complementi anguli G C A, qui angulo D C A, per radium mobilem interim percurſo, ſit in data ratione b *ad* a, *quam Rhodoneae ipſius propriam diximus.*

Ejuſmodi ergo Rhodonearum proprietates praecipuas enucleabimus, necnon ſpatia, & perimetros breviter dimetiemur ſequentibus propoſitionibus.

Propositio I.

Si fuerit arcus E A (*fig.6.* 7.) ad quadrantem AF (ſive angulus E C A ad rectum) ut *a* ad *b*, erit E C unus è maximis ramis Rhodoneae, ſive erit E apex unius ex eius foliis.

Nam ex deſcriptione patet, ponendum eſſe ramum C E aequalem F C ſinui quadrantis A F, qui omnium ſinuum eſt maximus.

Adde, quod tunc evaneſcit ſinus complementi anguli, qui ſit ad ipſum E C A, ut b *ad* a, *ideoque vis ſollicitans punctum mobile in radio ad progreſſum à centro, quae tali ſinui proportionalis eſt, ut diximus, ceſſat illud ulterius promovere; ac deinceps*

inceps ſinus complementi reſpondens majori angulo ad alteram partem cadit reſpectu centri, ideoque vis paracentrica ex centrifuga in centripetam mutatur, ipſumque punctum verſus centrum redire cogit, & alteram Rhodoneae frondis partem deſcribere, uſque dum ſimilis ſinus iterum evaneſcat, puncto deſcribente ad centrum reducto, ac rurſus in alteram plagam ſe protendere incipiat, ideoque reviviſcat vis paracentrica, promovens iterum punctum illud mobile a centro, ut aliam frondem deſcribat.

Propositio II.

Quodlibet folium Rhodoneae circa axem CE (*fig.* 6.) hinc inde aequali, uniformi, & ſimili expanſione ſpargitur.

Factis enim hinc inde aequalibus angulis ECM, ECD, ob arcus aequales interceptos EM, ED, ſi fuerit arcus AM ad AN, ut AE ad AF, ſive ut AD ad AG, nempe in data ratione *a* ad *b*, etiam reſidui EM, FN, itemque ED, FG in eadem ratione erunt: adeoque cum antecedentes EM, ED ſint aequales, etiam conſequentes FN, FG invicem aequabuntur,

buntur, uti & reſidui ad quadrantes N K, G A, quorum ſinubus aequari cum debeant rami Rhodoneae C L, C I, & ipſi aequales erunt; quare ab axe C E hinc inde aequali, & uniformi expanſione ſpargitur quodlibet folium Rhodoneae. Quod erat &c.

Corollaria.

I. Ob aequales arcus E M, E D, fit A E medius arithmeticus inter A M, A D, qui intercipiunt aequales ramos Rhodoneae, ideoque horum ſumma illius duplum adaequat, ſive aequatur toti arcui A E P ſectoris circumſcribentis unum Rhodoneae folium.

II. Hinc etiam arcus M P aequatur A D.

III. Et eorundem arcuum A M, A D ſumma ad ſemiperipheriam A N K eſt in data ratione *a* ad *b*, quam habet A E ad quadrantem A F.

IV. Et ſector Rhodoneae circumſcriptus eſt ad ſemicirculum in eadem data ratione *a* ad *b*, quam habet arcus A P, ſive ſumma utriuſque A M, A D, ad ſemiperipheriam A N K.

Pro-

Propositio III.

Numerus foliorum, quibus integra Rhodonea ſimplex compingitur, eſt ad unitatem, ut $2b$ ad a.

Tot enim folia emergunt ex hac deſcriptione, quot ſectores unicuique folio circumſcripti intra circulum diſponi poſſunt: ſed quilibet ſector eſt ad ſemicirculum, *ex Coroll.* 4. *praeced.* ut a ad b, adeoque ad circulum, ut a ad $2b$; quare numerus foliorum in una circulatione, qui idem eſt, ac numerus ſectorum, ejuſmodi circulum complentium, eſt ad unum, ut $2\ b$ ad a; quod erat &c.

Corollaria.

I. Hinc Rhodoneam ſimplicem deſcribere poſſumus, quae datum foliorum numerum m, puta ſex complectatur, ſi nempe pro ratione a ad b, aſſumatur ratio 1 ad $\frac{m}{2}$ (in caſu propoſito 1 ad 3) quomodo erit $2b$ ad a, ut m ad 1, ideſt in hac hypotheſi, ut 6 ad 1, adeoque prodibit datus numerus foliorum m, nempe

in

in propoſito Rhodonea exafolia reſultabit. Vide tamen Scholion his adnexum.

II. Sed & Rhodoneam duplicem, triplicem, quadruplicem &c. eadem arte componemus, dato foliorum numero in ſe recurrentem, ſi nimirum pro Rhodonea duplici ſumatur ratio 1 ad $\frac{m}{4}$, exiſtente dato numero m impari, alias prodiret Rhodonea ſimplex, ſub duplo foliorum numero, quae in ſecunda circulatione ſibimet ſuperponeretur, per eadem foliorum veſtigia recurrens. Pro Rhodonea triplici aſſumatur ratio 1 ad $\frac{m}{6}$, dummodo numerus m non ſit per 3 diviſibilis, alias iterum ſimplex Rhodonea prodiret, ſub triplo foliorum numero contenta. Similiter pro quadruplici aſſumenda foret ratio 1 ad $\frac{m}{8}$ dummodo numerus m ſit impar, alias Rhodonea ſimplex, aut duplex (ſi pariter par non eſſet) oriretur, ut antea; oportet enim, in prima circulatione, reſpectu Rhodoneae duplicis, haberi integrum aliquem foliorum numerum, & ſemiſſem alterius folii; reſpectu triplicis, integrum numerum cum triente, aut duobus trientibus;

reſpectu

reſpectu quadruplicis integrum numerum cum quadrante, aut tribus quadrantibus alterius folii, atque ita pariformiter in aliis.

Scholion.

Supponitur in hac propoſitione, ejuſque corollariis, quod ſingulis circuli ſectoribus ſingula Rhodoneae folia inſcribantur, nullis vacuis ſectoribus intermediis alternatim remanentibus; id quod tamen paſſim evenire poſſe, ac debere, ubi ratio a *ad* b *eadem ſit, quae unitatis ad imparem numerum, ipſamet continua curvae hujus deſcriptio perſuadet; ut ſi ratio fuerit* 1 *ad* 3 *prodibit curva, plexu ABCDEFGHICKA*(fig.21.22.)*in ſe recurrens, tribus dumtaxat foliis exactis, quae totidem ſectores MCR, COQ, CLS occupant, vacuis remanentibus totidem aliis ſectoribus interpoſitis. Si fuerit ratio* 1 *ad* 5, *deſcribetur curva ABCDEFGHIKLMNOPQA*,(fig.23.24.)*poſt quinque folia ad idem principium rediens, totidem pariter vacuis ſectoribus alternatim relictis: qui tamen inpleri poſſent, ſi eodem tempore, quo punctum C ex centro per radium CR movebatur ad has curvas deſcribendas, aliud punctum ſimili, ſed oppoſito motu per CS motum fuiſſet, ſimili prorſus, & aequali curva in alternis illis ſe-*

ctoribus deſcripta, ad Florem complendum, qualis in hac Propoſitione, & Corollariis adjectis ſupponitur. At quoties ratio a *ad* b *eſt eadem, quae unitatis ad numerum parem, uno ſimplici motu ejuſdem centri* C, *juxta prædictas leges per radium repentis, dum ſuam circulationem radius perficit, oriuntur omnia Rhodoneae folia ſingulos ſectores implentia: non ita quidem, ut poſt unius folii deſcriptionem oriatur folium ex eadem parte ipſi a latere contiguum, (id enim arbitraria poſitio fingeret, ſed motus continuationis Lex nequaquam admittit) ſed ad oppoſitam partem, ſectoris collateralis contrapoſito ad verticem ſectori inſcriptum; Ut ſi ratio ſit* 1 *ad* 4, *Rhodoneae flexus per puncta* Cb *A BCDEFCGHICKL &c.* (fig. 25.) *ſinuabitur, ſingulis diametris* de, gf, nm *tangentibus reſpectivè convexitatem binorum foliorum ex una parte BCD, & binorum ex alia PCQ; necnon hinc FCG, inde TCS, itemque ICK, & XCY; ac denique* aCb, *& NCM; ut octo folia reſultent, poſt completam circulationem in ſe redeuntia: Praeterea in hac eadem Propoſitione, ac Corollariis ſubnexis, talis Rhodonearum deſcriptio ſupponitur, quae in ipſamet prima circulatione folia exhibeat diſtinctis ſectoribus inſcripta, nullaque ex parte ſibimet ſuperpoſita: quod tamen evenit, quoties ratio* a *ad* b

non

non fuerit unitatis ad integrum numerum, ſed ad fractionem unitate majorem, ſive cuiuſvis numeri ad alium majorem contra ſe primum: ſic, ubi ratio a *ad* b, *fuerit ſubſeſquialtera, ideſt* 1 *ad* $\frac{3}{2}$, *ſive* 2 *ad* 3, *ſi conſiderentur tantùm diſtincta folia* *ABCF*, *HDCG*, *MICL*, (fig. 26. & 27.) *totidem ſectoribus inſcripta, utique foliorum numerus eſt* (*juxta hanc propoſitionem*) *ad unitatem, ut* 2 b *ad* a, *nempe ſicut* 6 *ad* 2, *hoc eſt triplus. Verùm ſi attendatur continua curvae deſcriptio, exurgunt omninò ſex folia, quorum ſingula binis finitimis ex parte ſuperponuntur; procedit enim curva juxta ordinem litterarum* *ABCDEFCGHDCI KGCLMICBNLCFA*. *Et ſic in aliis rationibus per quoslibet ab unitate numeros expreſſis: obſervando, quod ſi uterque datorum numerorum ſit impar, foliorum numerus abſolutè aequatur ſoli numero* b; *ſi verò alter numerus par fuerit, erit ſemper numerus foliorum aequalis* 2 b; *adeout ſive ratio ſit* 5 *ad* 7, *ſive* 3 *ad* 7, *ſive* 1 *ad* 7, *ſemper Rhodonea ſeptem dumtaxat foliorum proventura ſit; ſin vero aſſumatur ratio* 6 *ad* 7, *vel*, 4 *ad* 7, *aut* 2 *ad* 7, *futura ſit foliorum* 14, *ſed ſibi invicem ſuperpoſitorum.*

PRO-

Digitized by Google

Propositio IV.

Si ratio *a* ad *b* non ſit numeris effabilis, ſed arcus D A, G A (*fig.* 5.) ſint incommenſurabiles, innumera folia ſibimet per infinitas circulationes advoluta circumponentur.

Quaelibet enim circulatio, praeter certum foliorum integrorum numerum, partem folii, angulo, reſpectu totius anguli folium integrum comprehendentis, incommenſurabili correſpondentem importabit, nec umquam ad idem punctum deſcriptio revertetur, adeo ut aequatio ejuſmodi curvae infinitorum ſit graduum.

Propositio V.

At ſi ratio *a* ad *b* (*fig.* 8.) fuerit dupla, prodibit Rhodonea unifolia.

Nam arcus A D E, qui ſit ad quadrantem A F, ut *a* ad *b*, nempe in ratione dupla, eſt ſemiperipheria: adeoque ſemicirculus eſt ſector A F E complectens ſemifolium C I E, cujus axis E C *ex Propoſ.* 1. ideoque integro folio circulus integer circumſcribitur; unde hic

etiam,

etiam, ut in propoſitione quarta, numerus foliorum eſt ad unitatem, ut $2b$ ad a: quemadmodum ſcilicet a aequatur $2b$, ita foliorum numerus in hoc caſu unitatem adaequat.

Corollaria.

I. Facilis eſt hujuſmodi Rhodoneae unifoliae deſcriptio, ſi ſuper radio EC, velut diametro, ſemicirculus ESC deſcribatur, ductaque chorda ESD, ac juncto radio CD, & connexa CS, fiat ſemper CI aequalis CS; nam cum CS ſit ſinus anguli CES ad radium CE computatus, ejuſque anguli duplus ſit ACD, erit ramus CI ad Rhodoneam rationis duplae, juxta geneſim praemiſſam.

II. Unde etiam ſi centro C, quolibet intervallo CS, in dicto ſemicirculo arcus PS deſcribatur, & tantundem extendatur in I, ut ſint arcus PS, SI aequales, erit punctum I ad Rhodoneam; quippe CS perpendicularis chordae ED bifariam ſecat in praecedenti deſcriptione angulum ECD; cumque ſit CI aequalis CS, punctum I eſt in arcu circulari, centro

centro C per I tranſeunte, qui continuatus in P remanet bifariam ſectus in S.

III. Et hinc patet, hanc Rhodoneam duplam eſſe circuli ſuper diametro E C deſcripti, ob quoslibet arcus I S P duplos ipſorum S P; indeque dimidiam circumſcripti circuli. Id quod conſonat infra generatim demonſtrandis ad *Prop.* 8.

Propositio VI.

Ubi ratio *a* ad *b* eſt aequalitatis, efficitur Rhodonea bifolia, quae nihil aliud eſt, quam duplex circulus ſubduplae diametri ad diametrum circuli, qui Rhodoneae circumſcribitur.

Nam ramus Rhodoneae C I (*fig.* 9.) debet in hoc caſu aequari ſinui ipſiuſmet arcus decurſi A D, ergo C I perpetuò aequatur D H, & juncta F I, erunt latera C D, D H aequalia lateribus F C, C I circa alternos parallelarum angulos aequales C D H, F C I; unde angulus quoque F I C aequatur recto C H D, ideoque punctum I eſt ad ſemicirculum ſuper diametro F C deſcriptum; adeoque duplex circulus FIC,

C G V,

CGV, circa diametros FC, CV deſcriptus, erit locus talium ramorum integrae circulationi reſpondentium, ideſt Rhodoneam ipſam bifoliam conſtituet. Quod erat &c.

Corollarium.

Etiam hic conſtat, Rhodoneam bifoliam dimidiam eſſe circuli circumſcripti, adeoque aequalem unifoliae Rhodoneae praecedentis propoſitionis.

PROPOSITIO VIII.

Quodlibet folium Rhodoneae eſt ad quadrantem circularem, ut *a* ad *b*.

Ductis enim radiis infinitè proximis CID, C*id*, (*fig.* 10. 11.) & ductis ſinubus GH, *gb* correſpondentibus, nempe aequantibus ramos interceptos CI, C*i*, deſcriptoque concentrico arcu IR, patet fore elementum C*i*I ſemifolii Rhodoneae ad elementum GH*bg* quadrantis, ut ſemiſſis arcus IR ad H*b*, eo quod

baſes,

baſes Ci, gb trianguli elementaris CiI, & rectanguli elementaris gbHG aequentur; ergo duplum ipſius CIi ad GHbg eſt ut integra RI ad Hb, nempe in ratione compoſita ex RI ad Dd, & Dd ad Gg, & Gg ad Hb; ſed quia Gg ad Hb (ex theoria infinitè parvorum) eſt ut radius Cg ad ſinum gb, nempe ut CD ad CI, vel Dd ad RI, ratio Gg ad Hb elidit aequalem ſibi reciprocam RI ad Dd; ergo ſupereſt, ut ratio RI ad Hb eadem ſit, quae Dd ad Gg; ſed haec eadem eſt, quae a ad b, cum in tali ratione ſint, tam AD ad AG, quam Ad ad Ag, adeoque, & reſidua Dd, Gg eandem rationem ſervent; ergo RI ad Hb ſive duplum elementaris ſpatii CIi ad elementum quadrantis GHbg, eſt in dicta ratione a ad b; & hoc ſemper; quare duplum ſemifolii CIE, nempe integrum Rhodoneae folium, eſt ad quadrantem, ut a ad b. Quod erat &c.

Corollaria.

I. Hinc ſemifolium CIE ad quadrantem eſt ut ſemiſſis ipſius a ad b, ſive ut a ad $2b$.

II.

II. Item ſegmentum quodlibet Rodoneae CIi ad ſemiſegmentum circuli Agb eſt in eadem ratione a ad $2b$.

Propositio VIII.

Quodlibet folium Rhodoneae medietas eſt ſectoris circularis ſibi circumſcripti, & integra Rhodonea ſimplex medietas circuli, duplex duorum, triplex trium circulorum &c.

Nam, *ex praecedente*, quodlibet folium eſt ad quadrantem, ut a ad b, ideoque ad ſemicirculum, ut a ad $2b$; ſed ex *Coroll.* 4. *Prop.* 2. ſemicirculus ad ſectorem folio circumſcriptum eſt, ut b ad a; ergo ex aequo perturbatè quodlibet folium eſt ad circumſcriptum ſectorem, ut b ad $2b$, ſcilicet in ratione ſubdupla; quare & omnia folia Rhodoneae ad omnes circumſcriptos ſectores, ideſt Rhodonea ſimplex ad circulum, duplex ad duos circulos, triplex ad tres &c. in eadem ſubdupla ratione erit.

Aliter. Numerus foliorum, *ex Prop.* 3. eſt ad unitatem, ideoque Rhodonea ipſa ad unum folium (ſi eſt ſimplex) ut $2b$ ad a; ſed folium

eſt ad quadrantem circuli, *ex praeced.* ut *a* ad *b*, ergo Rhodonea ſimplex eſt ad quadrantem circuli, ut 2 *b* ad *b*, ſcilicet in ratione dupla; quare ſimplex Rhodonea aequatur ſemicirculo. Similis diſcurſus Rhodoneis duplicibus, & triplicibus applicari poteſt; nam in illis numerus foliorum eſt ad unitatem, ut 4*b* ad *a*; in his verò, ut 6*b* ad *a* &c.

Corollaria.

I. Quaelibet Rhodonea ſimplex cuilibet ſimplici Rhodoneae eidem circulo inſcriptae eſt aequalis, quocunque foliorum numero conſtet, ſemper enim aequalis eſt ſpatio ejuſdem ſemicirculi.

II. Item quaelibet Rhodonea duplex cuilibet duplici, & quaelibet triplex cuivis triplici aequalis eſt, ob eandem rationem; quippe illa ſpecies eſt ſemper circulo aequalis, haec ſeſquicirculo; & ſic de aliis. Oportet autem in duplici, aut triplici Rhodonea computare ſpatia foliorum, quae ſibi ſuperponuntur, tamquam diſtincta eſſent.

Scholion.

Scholion.

In comparatione totius Rhodoneae ad circulum hic quoque, ut in Schol. Prop. 3. *dictum eſt, ſupponitur omnis ſector ſuum diſtinctum Rhodoneae folium complecti, non verò intermedios aliquos vacuos ſectores remanere, aut folia ſibi ex parte ſuperimponi in ipſa deſcriptione, dum nondum unica circulatio perfecta eſt. Nam ſi alternatim ſectores circulares vacui interponantur Rhodoneae foliis, patet integras illas ſimplices Rhodoneas uni dumtaxat quadranti circulari aequales fore; ſi verò in ipſa deſcriptione folia ſingula ſimili quadam portione ſibimet ſemel ad eandem partem ſuperpoſita proveniant, tota Rhodonea pari foliorum numero gaudens, computatis portionibus foliorum ſibi ſuperimpoſitis, integro circulo aequabitur; etenim folia alternatim ſumpta NLCB, EFCD, KGCI,* (fig. 26. 27) *quae diſtinctis ſectoribus contiguis circulum integrantibus inſcribuntur, ſunt medietati circuli aequalia, cum quodlibet folium dimidium ſit ſui ſectoris. Eodem modo reliqua folia, quae totidem ſunt, alteri medietati circuli aequantur; ergo omnia ſimul toti circulo ſunt aequalia. Ubi verò impari foliorum numero gaudet Rhodonea* (*quia tunc, ex dictis* in Schol. Prop. 3. *tam* b, *quam* a *eſt numerus im-*

par) ejus ſpatium eſt ad circulum, ut a *ad quaternarium, computatis tamen ſegmentis ſuperpoſitis, ac ſi diſtincta forent; nam quodlibet folium eſt ad quadrantem, ut* a *ad* b; *ſed foliorum numerus aequatur* b, *ergo integra Rhodonea eſt ad quadrantem, ut* ab *ad* b, *ſcilicet ut* a *ad* 1; *ita ut aequetur tot quadrantibus, quot indicat numerus* a; *unde ad circulum ipſum eſt, ut* a *ad* 4.

Propositio IX.

Bifariam ſecto angulo ECA, (*fig.* 12.) quem axis folii Rhodoneae cum tangente CA continet, per rectam CD occurrentem Rhodoneae in I, & radio CI deſcripto arcu circulari ISK, erit lunula KEI quadrabilis; nempe erit illa ad quadratum radii, ut *a* ad 4*b*.

Cum ſit enim quadrans peripheriae AF ad arcum AE, ut AG, cujus ſinus GH aequatur CI, ad AD, qui eſt ipſius AE ſemiſſis, erit AG medietas quadrantis; ergo quadratum radii CG, vel CD, duplum eſt quadrati ſinus GH, ſive rami CI; ideoque ſector SCI eſt ad ſectorem ECD ſimilem, ut 1 ad 2; ſector verò ECD ad FCG eſt, ut *a* ad *b*; haec

enim

enim ratio eſt arcuum E A, F A, & ablatorum D A, G A, adeoque, & reſiduorum DE, G F; ergo ex aequo ſector S C I ad ſectorem F C G erit, ut *a* ad 2 *b*, nempe ut ſemifolium C I E ad quadrantem F G A C, vel ut ſegmentum Rhodoneae C I ad ſegmentum circulare G A H vel ut reſiduum C E I C ad reſiduum F G H C; quare etiam reliquum ſemifolii S E I eſt ad reliquum triangulum C H G, aut tota lunula S I E K ad quadratum C H G T, in eadem ratione *a* ad 2 *b*, adeoque ad quadratum radii C G, quod praedicti quadrati eſt duplum, erit, ut *a* ad 4 *b*. Quod erat &c.

Corollaria.

I. Cum numerus foliorum Rhodoneae ſimplicis ſit ad unitatem, adeoque etiam ſumma omnium Lunularum, quas integra peripheria, radio C I deſcripta abſcindit, ad unam Lunulam K E I, ut 2 *b* ad *a*; ipſa verò Lunula ad quadratum radii, ut *a* ad 4 *b*, patet fore ſummam dictarum Lunularum ad quadratum radii, ut 2 *b* ad 4 *b*, nempe ſubduplam: hoc eſt, ſum-

mam

mam talium Lunularum aequare quadratum ipſum GHCT quadranti inſcriptum.

II. Unde ſumma Lunularum, ex una Rhodonea per dictam peripheriam abſciſſarum, aequatur ſummae Lunularum ex qualibet alia Rhodonea, quotcumque foliorum fuerit, eidem circulo inſcripta ſimiliter determinatarum.

III. Cum ejuſdem ſectoris ECA medietas ſit tam ſemifolium EIC, quam ſector ECD, vel CDA, necnon ſector CSH, fiunt ſegmentum CVI aequale trilineo EID, & ſemilunula ESI aequalis trilineo CVIH, quod ideò pariter quadrabile erit, utpotè ad triangulum CGH in data ratione *a* ad 2*b*.

IV. Et ſumma horum trilineorum in qualibet Rhodonea pariter ejuſdem erit quantitatis; quippe ſemper aequalis ſummae Lunularum ejuſdem, vel cujuſcunque alterius Rhodoneae ſimplicis ipſimet circulo inſcriptae.

V. Adeoque ſi illa triangularia foliorum Rhodoneae interſtitia binas quaslibet frondes interjacentia, veluti (*fig.* 13.) ICP, KCL,

MCN

MCN &c. vel Lunulae ipſae TEI, PFK, LGM &c. pro totidem foliis computentur, Flos inde exurget perfectè quadrabilis.

Scholion.

Nedum tota Lunula, ejuſve ſemiſſis ESI, aut trilineum IuCH (fig. 28.) *exactae quadraturae eſt capax, ſed quolibet radio CN, aut* Cn, *ipſis ad puncta R, V, ſive* r, u, *occurrente, utrumlibet ſpatium ſectum fuerit, in partes quadrabiles dividetur: nam poſita CP aequali CV, & ductis ſinubus PM, MQ, erit ſemifolium quidem CIVE ad quadrantem FCA, ut* a *ad* 2b, *portio verò CIV ad ſegmentum MAQ eſt in eadem ratione*, ex Corol. 2. Prop. 7. *ergo & reſidua Rhodoneae portio ECV ad reſiduam zonam quadrantis FMQC eſt in eadem ratione; ſed & ſector SCR ad ſectorem FCM dictam rationem obtinet, nempe* a *ad* 2b (*nam SCR ad ECN eſt in ratione ſubdupla, ſcilicet* a *ad* 2a, *& ECN ad FCM, ut EN ad FM vel EA ad FA, ſive AN ad AM, hoc eſt* a *ad* b, *vel* 2a *ad* 2b) *ergo etiam reſiduum ESRV ad reliquum triangulum CMQ eandem rationem obtinet.*

Similiter trilineo CulH *ſecto per rectam CR in punctis* u, r, *fiet portio* ulr *quadrabilis; nam facta*

Cp

Cp *aequali ipſi* Cu, *completoque rectangulo* Cpmq, *erit ſector* CrH *ad* CmA, *ut* a *ad* 2b, *nam* CrH *ad* CnA *eſt*, *ut* a *ad* 2a, *&* CnA *ad* CmA, *ut* a *ad* b, *vel* 2a *ad* 2b, *quare cum & ſegmentum Rhodoneae* Cu *ſit ad circulare ſegmentum* mqA *in eadem ratione*, *etiam quadrilineum*, *curva* Cu, *arcu* rH, *rectiſque* ur, CH *interpoſitum*, *erit ad triangulum* Cmq *in eadem ratione* a *ad* 2b.

Unde & trilineum utrumque VRI, urI *quadrabile pariter erit*; *ipſaque trilinea tunc inter ſe aequalia erunt*, *adeoque & quadrilinea* EVRS, CurH *inter ſe pariter aequabuntur*, *cum rectae* CV, Cu *aequali angulo à recta* CI *hinc inde ſejunctae fuerint*, *ſive cum rectarum* CV, Cu *quadrata ſimul aequalia fuerint quadrato radii* CF; *nam ob arcus* EN, An *aequales*, *etiam arcus* FM, Am, *qui ad illos ſunt in data ratione* b *ad* a, *aequales erunt*, *& fiet* PM *aequalis* mq, *&* PC *aequalis* Cq; *ergo quadrilinea* ESRV, CurH, *quae ad aequalia triangula* CMQ, Cmq *ſunt in data ratione* a *ad* 2b, *pariter invicem aequalia erunt*, *ac conſequenter trilinea quoque* RVI, ruI *aequabuntur*.

Hinc complures aliae Rhodonearum partes quadrabiles determinari poſſunt : *nam ſi ex ſemifolio auſe-*

auferantur ſegmenta duo per ramos, quorum ſimul quadrata aequentur quadrato radii, cum illa ſint ad ſemiſegmenta circularia correſpondentia, quorum ſinus ipſis ramis aequentur, in data ratione a *ad* 2 b; *reliquum ſemifolii erit ad rectangulum quadranti inſcriptum, quod, detractis illis ſemiſegmentis circularibus, quadranti remanet, in eadem ratione data; ita ubi data ratio* a *ad* b *fuerit ſubſeſquialtera*, (*quam Rhodoneae ſpeciem* ad finem Scholii poſt Prop. 3. *ſupra conſideravimus*) *cum partes foliorum ſibi ſuperpoſitae, velut C Q B P C* (fig 26.) *ex binis ſegmentis aequalibus C Q B, C P B coaleſcant, ramum C B habentibus aequalem ſinui arcus dimidii quadrantis, ſi ex ſemifolio C Q B N ſegmentorum illorum aggregatum C Q B P C auferatur, reliquum erit ſemifolium C P B N quadrabile, utpote pars tertia quadrati inſcripti quadranti, & integrum folium eo modo attenuatum, nempe C P B N L O C, erit pars tertia quadrati radii, & integer Flos ex ſex foliis coaleſcens C P B N L O C, C Q B A F R C &c. erit quadrabilis, ideſt aequalis quadrato, quod eidem circulo inſcribitur.*

Similiter in Rhodonea rationis 2 *ad* 5, *ablatis ſegmentis foliorum communibus, reliquus flos ex decem foliis velut* C m I G D n C, C o D A B p C *&c.* (fig. 29.) *reſultans, quadratum aequat circulo inſcriptum*

 ſcriptum

ſcriptum. Nam ramus C I eſt ſinus arcus, qui ad H F ipſius F G ſemiſſem eſt, ut 5 ad 2, ſcilicet ut F G K circuli quadrans ad arcum G F, & ideo C I eſt ſinus arcus dimidii quadrantis; unde ſegmenta quaelibet C m *I, C* n *D ſunt ad ſemiſegmenta circularia dicto ſinui, & arcui 45 graduum interpoſita, ut 2 ad 10, in qua etiam ratione eſt ſemifolium C I G ad quadrantem, & ſumma binorum ſegmentorum C* q *I, C* m *I ad ſummam utriuſque ſemiſegmenti, quod remanet in quadrante, dempto inſcripto quadrato; ideoque reliquum ſemifolii C* m *I G ad quadratum inſcriptum quadranti, vel area C* m *I G D* n *C ad quadratum radii, eſt in eadem ratione 2 ad 10, ſive 1 ad 5; itaque decem ſimul folia, cujuſmodi ſunt C* m *I G D* n *C, C* o *D A B* p *C, dupla erunt quadrati radii, ſive aequabunt quadratum circulo inſcriptum.*

Si fuerit etiam Rhodonea, cujus ratio ſit, ut 3 ad 4, elegantiſſimus Flos reſultabit, variis concinnis partium ſuperpoſitionibus ita diſpoſitus, ut intima quidem ejus ſegmenta, veluti C s o r *C* (fig 30. & 31.) *quadraturam reſpuant, ſed reliquae partes notam menſuram admittant. Cum enim ramus C* o *aequetur ſinui graduum 30, & ramus C P ſinui graduum 60, ita ut quadrata utriuſque ſinus aequalia ſint quadrato radii, ideoque deſcripto in alia figura ſeorſim*

ſim quadrante F D A C, eoque diviſo in D, ut ſit arcus A D graduum 60, & F D graduum 30, ductis ſinubus D N, D K, qui ramis ipſis Rhodoneae C I, C o, *aequales erunt, ſemifolium quidem* E I o s C *ſit ad quadrantem F D A C, ut* a *ad* 2 b, *nempe in hoc caſu ut* 3 *ad* 8, *& portio* C s o I *ad ſegmentum A D N, portio verò* C s o, *vel* C t Q *ad ſegmentum F D K ſit in eadem ratione, etiam reliqua area* C t *Q E I C ad reliquum rectangulum K D N C erit pariter, ut* 3 *ad* 8. *Et quia biſecto arcu D A in X, ductaque ex centro C X, bifariam, & normaliter ſecante chordam D A in Z, ſingula ſemiſegmenta A X Z, D X Z eidem F D K aequantur, erunt duo ſimul ſegmenta* C s o, C r o *ad ſegmentum D X A in eadem ratione, qua ſegmentum* C s o I *eſt ad D X A N; proptereaque reliquum* C r o I *ad reliquum triangulum A D N, & ſumptis duplis* C r o I Q t C *ad rectangulum K D N C in eadem ratione erit* 3 *ad* 8, *in qua eſt etiam area* C t *Q E I C ad dictum rectangulum; unde patet,* C t *Q I eſſe aequalem trilineo E Q I, & folium* C t *Q I* o r C *aequari folio E I Q* u, *& horum utrumvis eſſe quadrabile, & ſummam ex octo foliis, qualia ſunt* C r o I *Q* t C, *vel ex octo E I Q* u, *fore triplam rectanguli K D N C, utpote ad ipſum in ratione* 24 *ad* 8, *adeoque ſummam ex omnibus ſimul ejuſmodi foliis,* C r o.

I E u *Q* t *C florem complentibus, aequari exagono inſcripto eidem circulo.*

Rurſus quia ſector E C G eſt 45 *graduum, & D C A grad* 60, *ille eſt ad hunc, ut* 3 *ad* 4, *nempe in ratione* a *ad* b, *& illius medietas E C R ad ipſum D C A, ſive ad F C X, ut* a *ad* 2 b, *ſcilicet ut* 3 *ad* 8; *in qua ratione cum ſit* C s o *I ad ſegmentum D N A, uti etiam* C s o *I E ad quadrantem F A C, adeoque, & ſpatium E C I, binis ramis Rhodoneae interiectum, ad zonam circularem F D N C, ſive ad illi aequalem aream F C Z D, ob triangulum D C Z aequale ipſi D C N, conſtat reliquum I E R ad reliquum D Z X in eadem ratione* 3 *ad* 8 *reſpondere, quemadmodum ad aequale ſegmentum F D K reſpondet in eadem ratione ſegmentum Rhodoneae* C s o; *itaque* C s o *aequatur E I R, & C* s o r *C aequatur E R G I; Et additis aequalibus* C r o *I Q* t *C,* u *E I Q, fiunt* C t *Q I* o s *C, &* u *E R G I Q, vel Q I E Z* u *Q, invicem aequales; unde area* C t *Q* u *Z F E I* o s *C, arcu Rhodonae Q I bifariam dividitur.*

Poſſet etiam concipi in eadem Rhodonea Flos ex quatuor foliis inſtar Lilii efformatis, velut eſt C t *Q* u *E I G P* o r *C, quae ſingula ex tribus quadrabilibus foliis* C t *Q I* o r *C,* u *E I Q, &* o *I G P ſimul collectis conſurgunt, ideoque ſunt ad rectangulum K D N C, ut* 9 *ad* 8; *& omnia ſimul quatuor illa*

folia

folia Liliiformia, nempe Flos integer, ſive Crux Liliata, erit ad exagonum circulo inſcriptum (quod ſextuplum eſt rectanguli KDNC, ſive trianguli DCA illi aequalis) ut 36 *ad* 48, *nempe ut* 3 *ad* 4, *ſive in ipſa ratione Rhodoneae* a *ad* b.

Propositio X.

Ad quodlibet Rhodoneae punctum I (*fig.* 14. & 15.) tangentem ducere.

Factum jam ſit; & ducta ad ramum IC perpendicularis ex centro CM conveniat cum tangente IM ad punctum M, & radio CI arcus IR infinitè parvus deſcribatur uſque ad alium ramum C*i* infinitè proximum, ſintque ramis CI, C*i* ſinus aequales GH, *gb*, & circuli tangens GL occurrat diametro in L. Erit ergo *i*C ad CM, ut *i*R ad RI, nempe in ratione compoſita ex *i*R, ſive *g*O, ad OG (hoc eſt *g b*, vel *i*C, ad *b*L) & OG, vel H*b* ad RI, (ſeu *b* ad *a* per *Prop* 7.) quare *i* C ad CM erit in ratione compoſita ex *i*C ad *b*L, & ex *b* ad *a*; ſed eadem ratio componitur quoque ex *i*C ad *b*L, & *b*L ad CM, ergo oportet, rationem *b*L, vel

HL,

HL,ad CM, eſſe aequalem datae rationi *b* ad *a*; ideoque ſi fiat, ut *b* ad *a*, ita ſubtangens circuli HL ad CM perpendicularem ramo CI, juncta MI Rhodoneam tanget ad datum punctum I. Quod erat faciendum.

Corollaria.

I. Si fiat, ut *a* ad *b*, ita CH ad CN ramo perpendicularem, juncta NI erit curvae Rhodoneae normalis; nam quia HL ad CM eſt, ut *b* ad *a*, & CH ad CN, ut *a* ad *b*, erit HL ad CM, ut reciprocè CN ad CH; ideoque rectangulum MCN aequabitur rectangulo LHC, ſive quadrato GH, ideſt quadrato rami CI; unde juncta NI, erit angulus MIN rectus, adeoque NI fiet curvae Rhodoneae in puncto I perpendicularis.

II. Patet, tangentes angulorum CIM, & LGH, vel GCA ſemper eſſe in data ratione *a* ad *b*.

PRO-

Propositio XI.

Si fiat, ut *b* ad *a*, ita radius AC ad CQ, (*fig.* 16. & 17.) & ſemiaxibus FC, CQ deſcribatur quadrans ellipſeos FVQ, erit ejus perimeter curvus aequalis perimetro ſemifolii Rhodoneae EIC, & partes partibus correſpondentibus.

Erit enim ubique etiam GP ad VP, vel *gp* ad *up* in eadem ratione, quae eſt AC ad CQ, ideſt *b* ad *a*; quare & reſiduae differentiae ordinatarum infinitè proximarum, ſcilicet GO, VX in eadem ratione erunt; eſtque IR ad H*b*, ſive GO, ex *Prop.* 7. ut *a* ad *b*, adeoque ut VX ad eandem GO; itaque VX aequatur IR; ſunt autem aequales etiam *u*X, ſive *g*O, & R*i* (ob aequalitatem ramorum cum ſuis ſinubus) ergo & ſubtenſa *u*V aequatur ſubtenſae *i*I, & ſic elementa ſingula harum curvarum ſemper aequalia oſtendentur; quare totus perimeter curvus ſemifolii Rhodoneae erit quadranti curvae ellipticae aequalis, & duo quaelibet Rhodoneae folia integrae curvae ellipſeos aequalem perimetrum obtinere demonſtrabuntur; quod erat &c. *Co-*

Corollaria.

I. Patet, Rhodoneam eſſe ellipſim quandam contractam : nam ſi confluentibus in centrum C punctis T, *t*, ordinatae quadrantis elliptici V·T, *ut*, in ramos abeant à centro C diductos, manente eadem curvae F V Q longitudine, contrahetur quadrans ellipſeos in ſemifolium ipſius Rhodoneae E I C.

II. Hinc iterum conſtat, Rhodoneam eſſe medietatem ſectoris circularis circumſcripti; eſt enim ſemifolium E I C medietas quadrantis elliptici FVQC, in quem expanderetur, ſi rami ab eorum centro diſſoluti fierent paralleli, & eidem rectae C Q perpendiculares, quomodo omne triangulum I C *i* in rectangulum V T *t u* ſui duplum abiret; cumque quadrans ellipticus ſit ad quadrantem circularem, ut baſis QC ad baſim CA, nempe, ut *a* ad *b*, in qua etiam ratione eſt ſector E C A ad eundem quadrantem circuli C F A, ex *Prop.* 1., patet, ejuſmodi ſectorem aequari quadranti elliptico, ideoque duplum pariter eſſe inſcripti folii Rhodoneae.

III. Inſuper colligitur, aequales eſſe foliorum perimetros in Rhodoneis, quarum ratio ſit reciproca, & radii ſuorum circulorum in eadem reciproca ratione ſibi reſpondeant; nam ſi radius CF, vel EC (*fig.* 17.) aequaretur baſi ellipſeos CQ (*fig.* 16.) & viciſſim radius CF ipſius aequaret baſim CQ ellipſeos alterius, patet eandem ellipſim FV utrobique reſultare debere, quippe iiſdem ſemiaxibus deſcriptam, eamque fore utrivis ſemifolio iſoperimetram, exiſtente ibi ratione *a* ad *b*, hic reciproce *b* ad *a*. Exempli gratia, ſi ratio *a* ad *b* ſit ſubdupla, ut juxta *Prop.* 3. hinc proveniat Rhodonea tetrafolia, radio autem ſubduplo, adeoque aequali baſi quadrantis ellipſeos iſoperimetrae, viciſſim fiat Rhodonea juxta rationem duplam, quae *per Prop.* 5. unifolia evaderet, erit haec iſoperimetra uni folio illius; nam baſis quadrantis elliptici huic reſpondens, aequabit radium circuli ad illam pertinentis, adeoque eadem curva elliptica utrivis folio aequalis oſtenditur.

IV. Si verò in eodem circulo duae Rhodo-

neae deſcribantur, altera juxta rationem *a* ad *b*, altera juxta reciprocam *b* ad *a*, perimetros ſuorum foliorum habebunt ipſis rationum antecedentibus *a*, & *b* proportionales; [Nam ſi primae Rhodoneae tertia quaedam Rhodonea ſimilis deſcriberetur in circulo, ad cujus radium prioris circuli radius foret, ut *a* ad *b*, eſſet perimeter primae ad perimetrum hujus tertiae ſibi ſimilis in eadem ratione radiorum *a* ad *b*, verum perimeter hujus tertiae *ex coroll. praeced.* aequaretur perimetro ſecundae Rhodoneae, utpote reciproca ratione, & juxta reciprocos radios deſcriptae, ergo perimeter primae ad perimetrum ſecundae eſt in eadem ratione *a* ad *b*.

Propositio XII.

Rhodoneam datae rationis *a* ad *b* minoris inaequalitatis ex conica ſuperficie ſecare.

Fiat, ut *a* ad *b*, (*fig.* 18.) ita radius baſis NB ad latus NC coni recti NCK, cujus baſis diametro NK ſit perpendicularis radius BF, qui ſit ad BR, ut *b* ad *a*, & circa diametros

BR,

B R, B F deſcribantur ſemicirculi BLR, BSF, quos ſecet quilibet radius B G in punctis L,S, ſitque G H diametro N K perpendicularis. Si ſuper circulo BLR erecta ſuperficies cylindrica intelligatur ſecare conicam in communi ſectione C I E, erit haec (in planum explicata) ipſamet Rhodonea propoſitae rationis. Nam communes ſectiones ejus cylindricae ſuperficiei cum planis triangulorum C B G, C B F per axem tranſeuntium, erunt rectae L I, R E ipſi axi C B parallelae, ideoque tam C I ad B L, quam C E ad B R erunt, ut latus coni ad radium baſis, ſcilicet ut *b* ad *a* *ex conſtructione*, ſive ut F B ad B R, aut S B ad B L; adeoque C E aequatur B F, & C I aequatur B S, ideſt ſinui G H. Explicata autem ſuperficie conica in planum ſectorem circularem ipſi aequalem, radio C N deſcriptum, ejus angulus planus NCG ſubtendetur arcu aequali ipſi N G, cui in baſi coni reſpondet angulus N B G; adeoque ut B N ad N C, ſive ut *a* ad *b*, ita erit angulus NCG ad ipſum NBG, cujus ſinui G H, ut vidimus, aequatur ramus

C I folii C I E, habentis pariter maximum ramum C E aequalem radio B F circuli baſis; quare folium ipſum ad Rhodoneam pertinet in data ratione *a* ad *b* deſcriptam. Quod erat &c.

Corollaria.

I. Cum ſit etiam C E ad E O, ut C F ad F B, ut *b* ad *a*, ut F B ad B R, ſintque C E, F B aequales, itidem aequales erunt B R, E O, & ſemicirculus B L R quarta pars erit ſemicirculi A E P duplam diametrum habentis, ſive erit medietas quadrantis A E O: eſt verò (*ex noſtra Appendice de Fornicibus Conicis*, quam ab anno 1698 poſt Vivianeorum Problematum demonſtrationem edidimus) ſuperficies conica A D E C ad ſuam baſim A D E O, ut ſuperficies ſemifolii C I E ad ſuam ichnographiam B L R, nempe in eadem ratione lateris coni ad radium baſis; ergo cum A D E O ſit dupla ipſius B L R, etiam ſuperficies ADEC ſemifolii C I E dupla erit, ut aliunde ſupra demon-

monſtravimus, ſectorem circularem folio circumſcriptum illius duplum eſſe.

II. Cum oſtenſum ſit, eſſe angulum ACI ad NBG, uti & ACE ad NBF, in data ratione *a* ad *b*, patet etiam in eadem ratione eſſe angulum reliquum ICE ad reliquum SBF, exiſtente (ut probavimus) ramo CI aequali ipſi BS; Unde ſi ſemicirculi CSE, (*fig.* 19.) in arcus concentricos SP, s *p* centro C deſcriptos reſoluti, arcus quilibet ejuſmodi ad puncta I, *i* ſimiliter dividantur, ut ſit ſemper PI ad PS, necnon *pi* ad *p*s, in eadem data ratione *a* ad *b*, erunt puncta I, *i* ſic inventa ad ipſam curvam Rhodoneam, hinc facilius, quam anteà docuimus, deſcribendam.

III. Imò & ſi ratio *a* ad *b* (*fig.*20.) fuerit majoris inaequalitatis, adhuc Rhodoneas ope circuli deſcribere licebit, generaliùs quàm in *coroll.* 2. *prop* 5. docuerimus ſupra: ſi nimirum arcus PS, *p*s producantur ad puncta I, *i* ut ſint PI ad PS, *pi* ad *p*s in data ratione *a* ad *b*; facto enim arcu EAR ad quadrantem EA in eadem ratione, ductoque radio CR, fiet angulus

gulus R C E ad A C E, ut angulus I C E ad angulum S C E, adeoque & reliquus *i*C R ad reliquum s C A, cujus ſinus aequatur C s, ſive C *i*, in eadem ratione erit *a* ad *b*; ideoque puncta I, *i* ſunt ad Rhodoneam datae rationis.

IV. Et ſi arcus illi P S, *p* s in ſemicirculo deſcripti, tum dividantur in ratione *a* ad *b*, tum augeantur in reciproca ratione *b* ad *a*, curvae interioris longitudo ad longitudinem exterioris erit, ut *a* ad *b* ex dictis in *coroll.* 4. *prop. praeced.*

Scholion.

Verum haec pro inſtituto noſtro, circa hujuſmodi curvas, delibaſſe ſufficiat: quamquam alia etiam Rhodonearum ſymptomata enucleare in promptu eſſet, uti & alias Florum in plano deſcriptorum ſpecies diverſa geneſi efformatas exhibere facile foret, necnon etiam in ſuperficie conoidali (ut poſtrema propoſitione Rhodoneas circa Conicam ſuperficiem advolutas dedimus) extenſa folia habentes deſcribere poſſemus, & quandam

fo-

foliorum in calice Floris latentium imaginem adumbrare, niſi jam taedio Lectorum parcendum eſſet. Unum hoc admonere non praetermittam, quod ex ultimò propoſita generali foliorum Rhodoneae deſcriptione ſimpliciſſima ex circulo derivata, ſuſpicari quis non immerito poſſet, etiam prima naturalium foliorum ſtamina, quae in Floris, aut Fruticis ſemine latent, non neceſſariò ſimilia eſſe foliis ipſis conſpicuis, & jam germinantibus, ſive adultis. Sicut enim, ſi Florum, & Fruticum folia noſtras Rodoneas reipſa imitarentur, poſſet quis concipere, illorum prima ſtamina ſeminibus cujusvis ſpeciei incluſa ſimpliciſſima circulari figura infinitè parva circumſcribi, ſed mox peculiari vi cujuslibet ſingularis ſpeciei, dum germinant, ita determinari ſuccum nutrititium, ut dum in longum eorum axis extenditur, per quaſdam undas, ſive gyros, ipſi origini ſui pedunculi, velut centro, circumpoſitos, expandatur, eoſque ſemper in determinata ratio ne, vel arctiores, vel ampliores, quam ſi circularis primorum

morum ſtaminum figura retinenda eſſet: quo poſito, talis ſpecies foliorum Rhodoneae, ac talis numerus, & forma exurgeret, qualem ratio illa determinaret. Ita etiamſi alia lege Florum, & Fruticum frondes Natura moliatur, non neceſſe eſt, eorum figuram uſque ad ipſa prima, ex quibus germinant, ſtamina obſervari: ſed illa in quibuslibet unius certae, ac determinatae figurae eſse poſset, quae tantum pro diverſa vi, determinante in ipſis expanſionem ſucci nutrititii, in ſingulis ſpeciebus varianda foret, juxta diverſam rationem, qua per ipſorum ſtaminum fibras dirigeretur, reſtrictis, aut dilatatis undis circularibus ſuae diffuſionis. Sed ne extra chorum ſaltemus, haec Philoſophis ſubobſcure innuiſse ſufficiat.

PARS

PARS SECUNDA

DE CLOELIIS.

Expoſitio.

EOdem modo, quo Rhodoneas in plano deſcripſimus, concipere poſſumus in ſuperficie ſpherica quaſdam curvas lineas, per folia varia ex apice C (*fig*. 32. 33. 34.) ipſius ſuperficiei ſeſe expandentes, veluti CLOHC, CIEFC &c. quas Cloelias nominare licebit. Earum autem geneſis, origini Rhodonearum analoga, eſſe poteſt hujuſmodi. Secetur ſphera (idem de spheroíde, aliove rotundo corpore, ex alia figura circumvoluta ortum ducente, dictum puta) plano horizontali exhibente circulum D E A, ſive hoc planum per centrum ſpherae tranſeat, ſive citra conſiſtat, ſive ultra ſe extendat, ut hemispherium, aut portionem minorem, aut majorem hemispherio determinet; ductoque verticali plano C G H B (*fig*. 35.) ſecante horizontalem circulum in radio B H, qui a fixo in peripheria ho-

rizontali puncto E intercipiat arcum EH reſpondentem alteri arcui EF in data aliqua conſtanti ratione *a* ad *b*, ponatur CM aequalis ſinui arcus ipſius EF (aut illi ſinui proportionalis in ratione CB ad BD, quoties circulus DEA non tranſierit per ſpherae centrum, ſive generalius, quoties radius DB non aequatur altitudini CB conoidis CDE) atque in plano CHB ordinetur MG ipſi BH parallela; idque ſemper fiat, quouſque per puncta ſic inventa G, *g* tranſeat curva C*g*GD. Hanc *Cloeliam* appellamus, ſed *primae deſcriptionis*; nam ubi libuerit potius in ipſo radio BH partem BI accipere ſinui praedicti arcus EF aequalem, & hinc erigere rectam IG, quae arcui CH occurrat in G, dicetur curva C*g*GD hinc proveniens *Cloelia ſecundae deſcriptionis*, cujus ichnographia foret Rhodonea rationis *a* ad *b*, adeout ſi cylindricus ſuper ejuſmodi Rhodonea B*i*ID erectus intelligatur, qui ſecet ſphericam, aut ſpheroidalem ſuperficiem in curva C*g*GD, haec ipſa futura ſit Cloelia ſecundae deſcriptionis nuper traditae,

cui

cui totidem folia competent in rotunda illa ſuperficie diſpoſita, quot foliorum fuerit ipſamet Rhodonea baſim cylindrici efficiens.

Patet autem, ejuſmodi Cloeliam ſecundae deſcriptionis dumtaxat in hemiſpherio, aut in portione spherae minori formari poſſe, non autem in portione majori hemiſpherio, in cujus baſi deſcripta Rhodonea, ſi ſuper ejus perimetro cylindricus erigatur, in parallelo, & aequali circulo dictae baſi aequidiſtante, & à centro ſpherae aeque remoto, ſui formam imprimet, ac deinceps in ſpherica ſuperficie minoris portionis, per baſim illius ſecundi circuli reſectae, ſuam Cloeliam efformabit, cujus foliorum apices ad marginem baſis portionis illius majoris nequaquam pertingent, ſed dumtaxat ad marginem baſis hujus minoris portionis ſubſiſtent.

Caeterum duplici motu intelligi poſſunt deſcriptae utriuſque deſcriptionis Cloeliae, altero aequabili arcus meridiani C L E per polum C (*fig. 36.*) tranſeuntis, & peripheriam circuli horizontalis H D A percurrentis, &

F 2 altero

altero puncti C per ipſum meridianum deſcendentis ea lege, ut (in prima deſcriptione) arcus percurſi C G ſinus verſus C M ſit ad ſinum rectum arcus Q E (ad quem arcus H E a Meridiano tranſmiſſus eſt in conſtanti ratione *a* ad *b*) ut altitudo portionis ſphericae C B ad radium ſuae baſis A B; At in ſecunda deſcriptione ipſemet ſinus rectus M G arcus tranſmiſſi C G ſit aequalis ſinui praedicti arcus Q E, ad quem pariter arcus H E, a Meridiano peragratus, eſt ut *a* ad *b*. Verum ad Propoſitiones ipſas jam deveniamus.

Propositio I.

Si fuerit arcus E D (*fig. 36.*) ad quadrantem E F ejuſdem circuli horizontalis, ut *a* ad *b*, ducatur autem per polum C meridianus C N D, erit hic axis unius è foliis Cloeliae (ſive primae, ſive ſecundae deſcriptionis) maximae ipſius folii longitudini coextenſus, atque in duo ſemifolia hinc inde aequalia, & ſimiliter per ſphericam ſuperficiem expanſa, ipſum dirimens. Nam

Nam in prima Cloeliae deſcriptione, cum arcus E F, cui reſpondet E D in ratione *a* ad *b*, ex hypotheſi ſit quadrans, ejus ſinus F B maximus erit; adeoque ſi in axe ſpherae C B ponatur illi correſpondens altitudo, ſeu ſinus verſus arcus interim à puncto mobili in meridiano tranſmiſſi, in ratione C B ad radium baſis B D, erit ejuſmodi altitudo, ſeu ſinus verſus aequalis toti altitudini portionis ſphericae C B, uti ſinus ipſe F B aequatur radio D B; quare totus arcus C D illi ſinui verſo correſpondebit, eritque maximus omnium per idem folium tranſeuntium, cuilibet enim alteri arcui, velut E H, vel E K reſpondens alius arcus in eadem ratione, in qua reſpondet quadrans arcui E D, ſinum habebit minorem, unde & altitudo, ſeu ſinus verſus C M arcus meridiani C G, vel C I, interim à mobili puncto tranſmiſſi, dum meridianus ipſe arcum E H, vel E K decurrit, minor erit ipſa C B, ideoque alii quilibet arcus meridiani C G, C I ad perimetrum Cloeliae terminati, ipſo C N D minores erunt. Quod ſi puncta H, K in eadem ho-

horizontali peripheria hinc inde à puncto D aeque remota ſumantur, etiam arcuum, quibus reſpondebunt arcus H E, K E in ratione *a* ad *b*, termini aeque diſtabunt à vertice F quadrantis E F, ideoque eorum ſinus aequales erunt; itaque eadem altitudo C M illis reſpondebit, ut ſinus verſus tam arcus meridiani C G, quam C I a perimetri folio intercepti: qui arcus propterea aequales erunt, & à meridiano C D aequalibus angulis hinc inde recedentes; adeoque meridianus ipſe C N D folium dirimet in partes aequales, ac ſimiliter hinc inde protenſas. Quod &c.

Si verò Cloelia fuerit ſecundae deſcriptionis, Aſſerti veritas patet, quia ejus Ichnographia erit Rhodonea eadem ratione in plano circuli horizontalis deſcripta, de qua in *Prop.* 1. *&* 2. *primae partis* ſimilia demonſtrata ſunt, ac facile quilibet percipere poteſt, etiam folio Cloeliae in ſuperficie ſpherica correſpondenti ejuſmodi Ichnographiae eadem pariformiter convenire, ac ſimili medio demonſtrari poſſe; Quare undecunque conſtat propoſitum. *Co-*

Corollaria.

I. Ducto arcu horizonti parallelo OINGL, extremis meridianis Cloeliam in polo C tangentibus intercepto, patet ſore arcus NG, NI, hinc inde intra folium à meridiano reſectos invicem aequales, itemque GL, IO pariter inter ſe aequari, quemadmodum in baſi, tam DH aequatur DK, quam HE aequatur AK.

II. Itaque arcus LN erit medius arithmeticus inter arcus GL, IL, uti & arcus ED medius eſt arithmeticus inter HE, KE: unde ipſorum, vel KE, KA, ſumma ADE, utpote dupla arcus ED, erit ad ſemiperipheriam circuli radii BD, quae dupla eſt quadrantis EF, ut ipſe arcus ED ad EF, nimirum ut *a* ad *b*.

III. Et ſector ſuperficiei ſphericae ADEC uni folio circumſcriptus, erit ad dimidium ſuperficiei portionis sphericae, in qua Cloelia deſcripta eſt, in eadem ratione *a* ad *b*: ad totam

tam verò dictae portionis ſphericae ſuperficiem, ut *a* ad 2b; ſunt enim ſphaerice ſuperficies meridianis interpoſitae, ut arcus parallelorum ab ipſi intercepti, qui metiuntur angulos inclinationis talium meridianorum.

Propositio II.

Numerus foliorum (invicem diſtinctorum) cujuſvis Cloeliae, per ſingulos ſimiles, & aequales ſectores, in quos curva ſuperficies portionis ſphericae diſtribui poteſt, ſua folia expandentis, eſt ad unitatem, ut 2 *b* ad *a*.

Totidem quippe erunt ejuſmodi folia, quot ipſi ſectores iiſdem circumſcripti, qui ſinguli ad totam ſuperficiem portionis ſphericae, adeoque ad ſummam omnium talium ſectorum, *ex coroll.* 4. *prop. praeced.* ſunt ut *a* ad 2 *b*. ergo convertendo numerus omnium ejuſmodi ſectorum, adeoque & multitudo inſcriptarum ſingulis frondium Cloeliae, eſt ad unitatem, ut 2 *b* ad *a*. Quod erat &c.

Scholion.

Scholion.

Supponitur hic quoque, ut *in Scholio prop.* 3. *primae partis* notavimus, foliis ſingulis diſtincta folia non invicem comunicantia reſpondere; Itaque ubi ratio *a* ad *b* foret unitatis ad imparem numerum, quoniam in Cloeliis, aeque ac in Rhodoneis, ſuapte natura ſingulis foliis totidem vacui ſectores interpoſiti eſſent, adeo ut foliorum numerus ad unitatem eſſet tantum ut *b* ad *a*, oportebit ſupponere, quod dum meridianus aequabiliter in gyrum agitur, duo ſimul puncta ex polo C per ipſum hinc inde contrario motu deſcendant, puta alterum per CA, alterum per CP, eadem lege ſervata, ut ſectores, qui vacui remanſiſsent, eodem tempore ſuis foliis repleantur; Similia enim vero iis, quae de Rhodoneis *in Scholio citato* animadvertimus, in Cloeliis quoque notanda ſunt, iiſdemque proportionaliter accomodantur; neque id ignorare poteſt qui legem concontinuitatis motus, ubique a Natura ſervandam, attenderit.

Propositio III.

Si ratio *a* ad *b* non ſit numeris effabilis, ſed arcus HE, QE, vel ED, FD ſint incommenſurabiles, innumera folia per infinitas circulationes ſibimet advoluta Cloeliam ipſam complebunt.

Patet ſimili ratione, qua idipſum *prop.* 4. *partis primae* in Rhodoneis ſupra demonſtravimus: nam quaelibet meridiani circulatio, praeter certum foliorum numerum, partem folii ſuo toti incommenſurabilem gignet, nec umquam ad idem punctum, eandemque directionem reſtituet mobilis puncti Cloeliam generantis progreſſum.

Propositio IV.

Si ratio *a* ad *b* ſit aequalitatis prodit in hemiſpherio Cloelia bifolia, quae in prima deſcriptione eſt idem, ac Carbaſum quadrabile in ſpherica ſuperficie a Cl. Leibnizio determinatum; in ſecunda verò deſcriptione, ejus folia con-

congruunt oculis interjacentibus Velum quadrabile Florentinum a Celeberr. Viviano in ſpherica pariter ſuperficie deſcriptum.

Nam in hoc caſu, juxta legem primae deſcriptionis, ponendus erit ſinus verſus CM (*fig.* 37.) meridiani CH aequalis ſinui recto HS ejuſdemmet arcus HE, quem à fixo puncto E in horizonte abſcindit; Atqui haec ipſa eſt conſtructio, quam pro enodando Aenigmate Florentino Cl. Leibnitzius propoſuit, ut videre eſt *in Actis Lipſiae Menſis Junii* 1692. *n.* 5. ergo bina Cloeliae folia tunc exhibent Carbaſum quadrabile à Leibnitzio in ſpherica ſuperficie determinatum.

Juxta legem verò ſecundae deſcriptionis, quoniam cylindricus ſuper Rhodonea erectus determinat Cloeliam in ſuperficie ſpherica ab illo intercepta, & ex *prop.* 6. *primae partis*, ex ratione *a* ad *b* aequalitatis prodit Rhodonea bifolia, quae nihil aliud eſt, quam duplex circulus ſubduplae diametri, FLB, BTP: (*fig.* 38.) conſequens eſt, ut Cloelia reſultet, quam perforatio, ſeu terebratio ſpherae à du-

plici cylindro F L B C, P T B C facta exhibet, nempe quam curva ſpherocylindrica FGC,PIC, ad alteram poſteriorem meridiani FCP partem continuata efformat; adeout ſemifolia CGF, CIP in ſpherica ſuperficie deſcripta ſint illi oculi, quos pro feneſtris aperiendos docuit in ſua Florentina teſtudine,ad modum Veli, per ſuperficiem ſphericam expanſa Vincentius Vivianus Aenigmatis illius Auctor, juxta conſtructionem ab ipſo ſtatim expoſitam in Opuſculo Italico *Formazione, e Miſura di tutti i Cieli* Florentiae eodem anno 1692. edito, *Probl.* 1. quod nos in *Geometrica demonſtratione Vivianeorum Problematum* anuo 1698. demonſtratum cum aliis dedimus. Quare undecumque conſtat propoſitum.

Corollaria.

I. Ejuſmodi Cloelia primae deſcriptionis ab hemispherio reſecta perfectè quadrabilis eſt, nimirum dupla quadrati inſcripti maximo circulo, qui baſis eſt ejuſdem hemispherii; Nam Leibnitzius *loc. cit.* probat ſuum Carbaſum in he-

hemiſpherii quadrante deſcriptum (quod eſt ſemifolium ejuſmodi Cloeliae bifoliae) aequari quadrato radii; ergo ſumptis quadruplis, tota area ipſius Cloeliae bifoliae primae deſcriptionis, in hemiſpherio deſignatae, aequatur quadrato diametri spherae, ſive dupla eſt quadrati maximo circulo inſcripti.

II. Et ſpatium trilineare EFGC, (*fig.* 37.) interceptum meridiano C E dirimente utrumque folium, & horizonte F E, ac curva ſemifolii Cloeliae F G C, duplum eſt ſegmenti circularis quadrantis F H E; nam tota ſuperficies hemiſpherici quadrantis F H E C dupla eſt circularis qnadrantis F H E B, unde quia ſemifolium F G C aequatur quadrato radii, ſive duplo trianguli F B E, reſiduum illud trilineum duplum erit ſegmenti reliqui F H E.

III. Ideoque exceſſus totus hemiſphericae ſuperficiei ſupra bina Cloeliae hujus folia, erit octuplus ejuſdem ſegmenti circularis quadrantis F H E.

IV. Si verò non in hemiſpherio, ſed in portione majori, aut minori ejuſmodi Cloelia deſcripta

ſcripta fuerit, ſinus verſi CM (*fig.* 37.) arcuum CG creſcent, aut decreſcent reſpectu ſinuum rectorum HS arcuum EH, in conſtanti ratione altitudinis portionis CB ad radium baſis FB, adeoque ex eodem Leibnitio *loc.cit.* *n.* 6. foliorum atea in eadem ratione creſcet, aut decreſcet, eritque ad quadratum diametri spherae, ſive ad duplum quadrati inſcripti ejus maximo circulo, in dicta ratione altitudinis CB ad radium baſis FB.

V. At Cloelia ſecundae deſcriptionis non ipſa quidem quadrabilis eſt, ſed interjacentia ſpatia trilinearia FGCIPEF (*fig.*38.) exacte quadrabilia exhibet; ſunt enim ſemivela Florentina Vivianea, quae ſimul ſumpta aequantur quadrato diametri spherae, ſeu dupla ſunt quadrati inſcripti maximo circulo, ſive octupla trianguli FBE, ut *in Vivianeis noſtris* olim demonſtravimus. Poſſumus autem *Cloeliam primariam* nuncupare eam, quae in hemispherio deſcribitur, *ſecundariam* vero, quae in aliis portionibus.

VI. Et quodlibet ejus ſemifolium CGF duplum

plum eſt ſegmenti quadrantis circularis FHE, atque integra Cloelia bifolia ejuſdem ſegmenti octupla, cum univerſa ſuperficies hemiſpherii ſit octupla quadrantis FHEB.

VII. Itaque area interjacens Cloeliam primae deſcriptionis aequatur foliis Cloeliae ſecundae deſcriptionis: & viciſſim area interpoſita foliis Cloeliae hujus aequatur ipſiſmet foliis illius. Et utraque Cloelia tam primae, quam ſecundae deſcriptionis ſimul ſumpta adaequat ſuperficiem hemiſpherii.

VIII. Sed & partes quaelibet utriuſvis generis Cloeliarum variis meridianis diſtinctae congruam menſuram ſimili determinatione accipiunt, ut facile ex dictis, atque ex infra dicendis erui poteſt; quemadmodum & ubi Cloelia ſecundae deſcriptionis baſim habuerit circulum ſpherae minorem circulo maximo, illius dimenſio ex iis, quae generatim infra docebimus *Coroll* 1. *prop*. 9. petenda erit.

Pro-

Propositio V.

Cloeliam primae deſcriptionis, qualibet ratione *a* ad *b* deſcriptam, quadrare.

Sit quadrans hemiſpherii PAKC, (*fig.* 39.) ſectus plano horizonti parallelo FEB (ſive ſupra centrum, ut figura exprimit, ſive infra, ut ſibi Lector facilè imaginari poterit, ac diagramma ſupplere) quod ſit baſis Cloeliae primae deſcriptionis, cujus ſemifolium eſto PGD. Sit etiam ſuper quadrante FEB ad altitudinem FO aequalem PB erecta ſuperficies cylindrica, tranſverſim ſecta plano OBE, definiente ungularem ſuperficiem FHENO. Ductis ubilibet duobus meridianis infinitè proximis PGHM, P*gbm*, ſecantibus maximum circulum AK in M, *m*, baſim portionis FE in H, *b*, Cloeliam verò in G, *g*, ductoque arculo GI parallelo ipſi H*b*, dictis meridianis intercepto, poterit elementum areae Cloeliae PG*g* accipi pro triangulo ſpherico PGI, a quo differt quantitate infinities minori; eſt

autem

autem, ex Archimedeis doctrinis, triangulum illud aequale ſuperficiei ex circumſcripto cylindro aeque altae, iiſdemque meridianorum planis interceptae, nimirum rectangulo ex ſinu verſo PR in arcum M*m*; ergo etiam elementum areae Cloeliae PG*g* aequatur PR in M*m*; quod ſi fuerit arcus HE ad EQ, nec non *b*E ad E*q*(adeoque & H*b* ad Q*q*) ut *a* ad *b*, erigaturque in ſuperficie ungulae cylindricae QN, erit haec ad ſinum QL, ut FO, ſeu BP, ad FB, nempe ex hujus Cloeliae geneſi, ut PR ad eandem QL, adeoque PR aequatur QN, & elementaris area PG*g* erit ad elementum ungularis areae NQ*qn*, ut M*m* ad Q*q*, ſcilicet in ratione compoſita ex M*m* ad H*b*, & H*b* ad Q*q*; quarum prima eſt ut radius CA ad radium BF, ſecunda eadem quae *a* ad *b*; hoc eſt poſito CS ad CA, ut *a* ad *b*, erit PG*g* ad NQ*qn*, ut CS ad BF; & hoc ſemper; quare omnes areolae elementares ſemifolii Cloeliae, correſpondentes arcui ED, ad omnes areolas ungulares NQ*qn*, iiſdem pari numero reſpondentes per totum

quadrantem E F, ideſt ſemifolium P G D, ad ungulam O N E Q F, ſive ad ad rectangulum ipſi aequale O F B P, *per coroll.* 2. *prop.* 4. *noſtrorum Vivianeorum*, eſt ut CS ad BF, ſive ut CS in BP ad F B P; erit igitur ſemifolium Cloeliae P G D aequale rectangulo ex C S in P B; ergo facile quadratur area ſemifolii, adeoque & integra Cloelia ſemper eſt quadraturae capax. Quod erat &c.

Corollaria.

I. Quoniam numerus foliorum Cloeliae *ex prop.* 2. *hujus* 2. *partis* eſt ad unitatem, ut 2 *b* ad *a* ſive ut 2 A C ad C S, erit numerus ſemifoliorum ad ſemifolium, ſive ad C S in B P, ut 4 A C ad C S, ideoque integra Cloelia (ſtantibus conditionibus *in dicta prop.* 2. *& ejus Schol.* aſſertis) aequatur rectangulo ex 4 A C (ſive ex dupla diametro) in altitudinem P B.

II. Hinc eadem ſuperficies Cloeliae, de qua loquimur, dupla eſt quadrati ſubtenſae P F,

quae

quae eſt media proportionalis inter diametrum ſpherae, & altitudinem portionis: ſive aequatur quadrato inſcripto circulo radii PF.

III. Et quia ſuperficies sphaerica portionis, in qua deſcribitur Cloelia, aequatur circulo radii ipſius ſubtenſae P F, ex Archimede, ideò interſtitia omnia foliis Cloeliae interpoſita aequantur quatuor reſiduis ſegmentis quadrantalibus, remanentibus eidem circulo, detracto inſcripto quadrato.

IV. Si in variis portionibus ejuſdem spherae deſcribantur ejuſmodi Cloeliae, erunt earum areae ad invicem in ratione altitudinum ipſam portionum.

V. Cloeliae omnes primae deſcriptionis in eadem portione ſpherica deſcriptae, juxta quamcunque rationem *a* ad *b*, ſunt invicem ſemper aequales, utpotè duplae quadrati ejuſdem ſubtenſae à polo ad marginem baſis portionis deductae.

Propositio VI.

Cloeliae ſecundae deſcriptionis in hemiſphe-rio deſcriptae, quecunque ſit ejus ratio *a* ad *b*, menſuram determinare.

Sit jam Cloelia ſecundae deſcriptionis, & ſe-mifolii PG*g*D(*fig*.40.)ichnographia erit ſemifoli-um Rhodoneae ejuſdem rationis DIB; & ſi fiat HE ad arcum EQ, ut *a* ad *b*, erit hujus ſinus rectus QL aequalis ipſi ramo BI, & ſinus complementi QN aequabitur lateri IG cy-lindrici ſuper Rhodonea erecti, ſuo termino G perimetrum Cloeliae in ſuperficie hemi-ſpherica deſcribentis; elementum autem areae interceptae inter PGD perimetrum Cloeliae, & meridianum PE illam tangens in polo P, eſt trapezium G*gb*H, quod aequatur rectangulo ex H*b* in IG, ex Archimedeis doctrinis, quare ad elementum ungulae cylindri, ſuper quadrante FDEB erecti ad altitudinem BP aequalem radio BE, ſectae autem plano per FB tranſeunte, & ad planum FEB per 45 gra-

dus

dus inclinato (quae ungula foret linea ſinuum QN ſuper arcu F Q erectorum) hoc eſt ad rectangulum ex QN in Qq, erit ut arcus H b, ad arcum Qq, nempe ut a ad b, & hoc ſemper; unde omnia ejuſmodi elementa arearum, inter folium Cloeliae, ac meridianum ipſam in polo P tangens, jacentium, ad totidem elementa ſuperficiei illius ungularis, nempe ad quadratum radii F B, erit in eadem data ratione a ad b; & duplicando antecedentes, totum ſpatium binis Cloeliae foliis interjectum eſt ad quadratum radii, ut $2a$ ad b; ſed ex oſtenſis numerus foliorum, adeoque & ſpatiorum bina quaelibet folia interjacentium, eſt ad unitatem, ut $2b$ ad a, ſive, ut $4b$ ad $2a$, ergo omnia ſimul ſpatia interjacentia folia Cloeliae in hemiſpherio deſcriptae, ſunt ad quadratum radii ſpherae ut $4b$ ad b, nempe in ratione quadrupla, adeoque dupla ſunt quadrati circulo maximo inſcripti; Cumque ſuperficies hemiſpherii ſit dupla circuli ejuſdem maximi, erunt ergo omnia ſimul folia Cloeliae dupla reliquorum ſegmentorum quadrantalium,

quae

quae circulo eidem remanent, dempto quadrato inſcripto. Quod erat, &c.

Corollaria.

I. Quaecunque igitur fuerit ratio *a* ad *b*, omnes Cloeliae ſecundae deſcriptionis in eadem hemispherica ſuperficie formatae, ſunt invicem aequales.

II. Et quidem frondes Cloeliae cujuslibet ſecundae deſcriptionis aequantur ſpatiis interjacentibus frondes Cloeliae cujuſvis deſcriptionis primae; ac viciſſim frondes hujus aequantur arcis interjacentibus folia illius.

III. Unde ſumma ex Cloelia primae deſcriptionis, & Cloelia ſecundae, in eadem hemispheria ſuperficie deſcriptis, aequatur curvae ſuperficiei ipſius Hemispherii.

IV. Spatia eadem interpoſita frondibus Cloeliae ſecundae deſcriptionis dupla ſunt quadrati ſubtenſae P F à polo ad marginem baſis hemispherii: folia verò ipſius aequantur octuplo ſegmenti circularis P F, dupla ſunt enim quatuor

tuor ejuſmodi ſegmentorum, quae maximo circulo remanent, dempto quadrato ejuſdem ſubtenſae quadrantis.

V. Singulariter autem notari poteſt, etiam partes interſtitiorum Cloeliae ſecundae deſcriptionis, puta trilinea DGH, aequari portioni ungulari ad arcum FQ reſpondenti, hoc eſt rectangulo BFN, ſeu BHI.

VI. Obſervari etiam meretur, quod ipſe arcus meridiani PG aequatur arcui EQ, ad quem arcus DE eſt in ratione *a* ad *b*; ſunt enim aequales eorum ſinus GR, & BI, ſive QL; adeo ut ejuſmodi Cloelia facilem geneſim habeat ex dupici aequabili motu, altero meridiani PE circulariter moti per arcum EH, altero mobilis puncti P per illud deſcendentis uſque ad horizontem, ita ut motuum velocitates ſint, ut *a* ad *b*, ſic enim ſpatia peracta EH, PG in eadem ratione erunt.

Digitized by Google

Propositio VII.

Cloeliae ſecundae deſcritionis in portione ſpherae minori hemiſpherio quavis ratione deſcriptae, menſuram venari.

Sit ſemifolium Cloeliae P G *g* F (*fig.* 41.) inſcriptum ſphericae portionis ſectori P F E B, cujus baſis ſector F E B, illique inſcriptum ſemifolium Rhodoneae B I F, ichnographicè ſubjacens Cloeliae P G F. Sit autem B A aequalis radio ſpherae, & arcus AMK ipſi FHE concentricus. Ducto autem ubilibet meridiano PGH, cujus communis ſectio cum baſi ſit radius B H, occurrens Rhodoneae in I, & ad arcum AK protenſus in M, ductoque arcus P G intra Cloeliam incluſi ſinu G R, qui aequabitur ramo Rhodoneae B I, ordinetur RS aequalis arcui K M; & ſimili conſtructione ubilibet facta, oriatur figura PSOB, quam dico aequari ſpatio in ſpherica ſuperficie interpoſito inter perimetrum Cloeliae, & meridianum PLE, a quo in polo P tangitur, videlicet areae FGPLE. Nam ducto alio meridiano

no P*b*, alteri PH infinitè proximo, & completa eadem coſtructione, quoniam R S aequatur arcui M K, & *r s* arcui *m* K, patet utriuſque differentiam V *s* aequari arcui M *m*, qui cum ſit ſimilis ipſi H *b*, & ex maximo ſpherae circulo reſectus, erit rectangulum ex ipſo M *m* in altitudinem GI, ſive BR, aut TS, aequale elementari ſpatiolo G H *b g* in ſuperficie ſpherica binis illis meridianis intercepto, & perimetro Cloeliae ſuppoſito; hoc ergo elementare ſpatium aequabitur ſpatiolo S T *t s*, quod pariter non differt ab rectangulo V *s*, vel T *t*, in T S; quod cum ſemper eveniat, patet, aream totam P S O B aequari dicto ſpatio inter Cloeliam, & baſim portionis ſphericae, ac meridianum P L E intercepto, videlicet figurae F G P L E; Quod erat &c.

Aliter. Ducatur in ſuperficie ſpherica, radio R G, arcus G L, cui in baſi correſpondebit arcus aequalis I Q, eritque M K, ſive R S, ad I Q, vel G L, ut M B ad B I, ut radius ſpherae ad ſinum G R, vel ut elementum arcus L *l* ad elementum ſinus verſi R *r*; ideoque

 pro-

produčtum extremorum S R *r* (nempe areola S R *r s*) aequabitur produčto mediorum, ſcilicet arcus G L in elementum L *l* (ideſt zonulae ſphericae G L *l g*) & hoc ſemper; tota ergo figura PSOB aequatur dičto ſpatio FGPLE. Quod erat &c.

Corollaria.

I. Hinc ſemifolium Cloeliae aequabitur reliquae figurae P S O X, complenti rečtangulum PBOX, quod aequatur ſuperficiei ſphaericae ſečtoris FPLE, cum ſit produčtum ex B O, aequante arcum A K, in portionis altitudinem P B.

II. Ex prima demonſtratione habetur, partem quoque H G P E aequari areae PBTS, & trilineum reliquum FGH aequari trilineo STO reſiduo.

III. Ex ſecunda verò demonſtratione colligitur, partem PGL aequari portioni PRS, & reliquum G L E F eſſe aequale R S O B, ſicut quadrilineum G L E H aequatur rečtangulo R S T B.

IV.

IV. Sed & partes ſemifolii areas habent in Figura PSOX ſibi correſpondentes, nam trilineum NFG aequabitur SOY, & NGP erit reliquae areae PSYX aequale, bilineum verò GP, trilineo P*n*S aequabitur.

V. Haec autem cùm pariter obtineant, quaecunque ſit ratio Rhodoneae *a* ad *b*, ex qua Cloeliae ipſius formatio dependet, patet eandem conſtructionem inſervire, ubi ratio eſt aequalitatis, cum nempe ſemifolium Rhodoneae foret ſemicirculus FIB, (*vide fig.* 42.) perforans portionem minorem ſphericae ſuperficiei; quo caſu ſector circuli circumſcripti eſt quadrans AMK, & IB, vel GR, eſt ipſemet ſinus arcus HE, ejuſque complementum HD eſt ad ſinum MO arcus AM in data ratione radiorum FB, ſive HB, & AB.

Propositio VIII.

Curvae Cloeliae ſecundae deſcriptionis in hemiſpherio deſignatae PGD (*fig.* 43.) cujus Ichnographia ſit Rhodonea BID, peripheriam ellipticam aequalem exhibere.

Facta P B ad B Q, ut *b* ad *a*, deſcriptoque quadrante circulari PFK, & ad ſemi axes Q B, K B quadrante elliptico Q V K, patet *ex prop.* 11. *primae partis*, fore curvam ſemifolii Rhodoneae BID aequalem peripheriae quadrantis elliptici Q V K; Ponatur ergo B S aequalis ſubtenſae ipſius quadrantis elliptici Q K, potens nimirum utriuſque Q B, & B K quadrata, & ſemiaxibus S B, B K nova ellipſis S T K deſcribatur; Dico hanc fore aequalem curvae ſemifolii propoſitae Cloeliae P G D. Fiant enim meridiani PGH, P *g b* infinitè proximie & cylindrici ſuper arcu Rhodoneae I *i* erecti communis ſectio cum plano *r g* L, baſi A B E parallelo, ſit arcus *g* L, qui aequalis erit ipſi arcui I *i*, ductoque ſinu G R, agantur ordinatae R F, *r f* ad quadrantem circularem P K B, & per puncta F, *f* ordinentur axi B K ellipſium Q K, S K, rectae M V T, *m u t*; ergo ex *coroll.* 6. *prop.* 6. *hujus ſecundae partis*, arcus ipſe P G, vel P F, erit ille, qui eſt ad arcum H E, ut *b* ad *a*, ideoque ex conſtructione dicta, *Prop.* 11. *primae partis*, fiet V *u* aequalis arcui

I *i*

I*i*, vel *g*L, & quadratum *g* L fiet aequale quadratis *u* X, & X V; eſtque ut S B ad BQ, nempe ut radix quadratorum BK, & BQ, ad BQ, vel, ob laterum B K ad B Q proportionalitatem cum ipſis *b*, & *a*, in qua etiam ratione *per prop. 7. primae partis* ſunt R *r*, & arcus I Y ipſi H*b* ſimilis & concentricus, ut radix *bb*, & *aa* ad *a*, vel ut radix quadratorum R*r*, & I Y, ad I Y, ita T M ad M V, & *tm* ad *mu*, atque T O ad V X; ut igitur ſumma quadratorum R*r*, & I Y ad quadratum I Y, ita quadratum T O ad quadratum V X, ut in dicta *propoſitione 11. primae partis* oſtenſum eſt, ergo ſumma quadratorum R*r*, & I Y aequatur quadrato T O, additiſque aequalibus quadratis Y*i*, & O*t*, ſive *f*Z, utravis enim aequatur differentiae ſinuum arcus P G, aut P F, fient tria quadrata I Y, Y*i*, & R*r*, ſive quadratum I*i*, aut *g*L, cum quadrato R*r*, aut G L, nempe quadratum G*g*, aequale quadratis T O, O*t*, ſcilicet quadrato T*t*; ideoque portio curvae Cloeliae G*g* aequatur arculo T*t* quadrantis elliptici; atque hoc ſemper in arcubus corre-

reſpondentibus oſtendetur; quare curva ambiens ſemifolium Cloeliae PGD aequatur quadranti peripheriae ellipticae S T K. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

I. Hinc perimeter binorum foliorum Cloeliae aequatur integrae peripheriae ellipticae, ſemiaxibus praedictis S B, B K deſcriptae.

II. Ubi ratio *a* ad *b* eſt aequalitatis, ſemiaxis ellipſeos S B ad ſemiaxem B K eſt, ut radix binarii ad unitatem; Id quod de ſui Veli Florentini perimetro, cui congruere in eo caſu Cloeliam ipſam primariam oſtendimus, jam pronunciaverat Vivianus, & nos ſua demonſtratione dudum firmavimus *in Vivianeis pag.* 136.

III. Si deſcribatur Rhodonea, cui pro ratione *a* ad *b* inſerviat ratio lateris, ſeu radicis utriuſque ſimul quadrati *bb*, & *aa* ad *a*, erit ejus perimeter aequalis perimetro Cloeliae deſcriptae in hemiſpherio juxta rationem *a* ad

b Rho-

b Rhodoneae prioris ſibi ichnographicè ſubjeſtae; Nam eidem Ellipſi utravis curva oſtendetur aequalis.

IV. Quemadmodum Rhodonea, *ex coroll.* 1. *prop.* 11. *primae partis*, eſt quaedam ellipſis contracta, ita & Cloelia concipi poteſt, ut ſuperficies quaedam ungularis cylindrica, arcubus baſi parallelis ita concidentibus, ut eorum extrema in polum confluant, hoc modo. Concipiatur quadrans circularis, radio BP, vel BK deſcriptus, in plano horizontali jacens, (*fig*. 44.) & ſuper illo erectus cylindrus ad altitudinem PS aequalem BQ, ſectus autem plano SBK, cujus & cylindricae ſuperficiei communis ſectio erit ellipſis STK ſupra determinata, eo quod ſemiaxis BS aequetur potentia ipſis PS, PB, hoc eſt ipſis BQ, BK. Quod ſi ergo in ſuperficie ungulari intelligantur innumeri arcus FT, *ft* paralleli baſi PGK, & concipiantur horum arcuum extrema F*f* coincidere, ac confluere in punctum P, a quo ipſi arcus jam divergant, omnibus eorum punctis, necnon reliquis extremis T, *t* à centro B aeque diſtan-

ſtantibus remanentibus, adeoque in ſuperficie ſpherica centro B circumfuſa diſpoſitis, ellipticus quadrans ST*t*, in Cloeliam PG*g*D (*fig.* 43.) ſibi longitudine aequalem deformabitur, & zona quaelibet FT*tf* in triangulum PG*g* contrahetur, ob arcum FT aequalem PG, cujus idem ſinus GR.

Scholion.

Hinc tamen inferre non licet, ſuperficiem ſemifolii Cloeliae PG*g*D eſſe dimidiam ungularis ſuperficiei STKP, quamvis haec in illam contrahatur, licet id valeat de Rhodonea, in quam contrahitur quadrans ellipſeos QVKB. Ratio diſcriminis eſt, quia etſi triangulum BI*i*, ſit dimidium zonae ellipticae ſibi correſpondentis, quae eſt quoddam rectangulum ejuſdem baſis, & altitudinis cum triangulo; non tamen triangulum ſphericum PG*g* cenſeri poteſt medietas zonae ſuperficiei cylindricae FT*tf*, licet haec baſim eandem habeat, & altitudinem; nec enim oritur area trianguli ſpherici

ſpherici ex ductu dimidiae baſis in in altitudinem, ut accidit in triangulis planis; ſed ex ductu arcus H*b*, qui eſt menſura anguli verticalis GP*g* ex maximo circulo accepta, in altitudinem PR, ſi agitur de triangulo infinite parvo: ac demum quodlibet triangulum ſphericum eſt ad ſuperficiem hemispherii, ut exceſſus omnium trianguli angulorum ſupra duos rectos, ad 4 rectos.

Propositio IX.

Si arcus TG, *tg* (*fig.* 45.) in ſuperficie hemiſpherica paralleli horizontali maximo circulo FE à Clòelia primaria ſecundae deſcriptionis PGF, & meridiano PTF per folii medium tranſeunte intercepti dividantur, aut amplientur, ad punta S, *s*, ut ſit TS ad TG, & *ts* ad *tg* in quadam data ratione *a* ad *b*, curva per haec puncta tranſiens PS*s*F determinabit ſemifolium Cloeliae ejuſdem datae rationis.

Nam Ichnographia primariae hujus Cloeliae PGF eſt ſemicirculus BIF, arcuum verò circularium TG, *tg* erunt arcus NI, *ni* con-

centrici ipſi FDE, & dicto ſemicirculo incluſi, qui à rectis SR, *sr* plano horizontali perpendicularibus ad puncta R, *r* proportionaliter dividentur, aut augebuntur, in ratione eadem *a* ad *b*, qua diviſi, vel aucti ſunt, arcus TG, *tg* ad puncta S, *s*; quare curva PSF habebit pro Ichnographia curvam BRF, quae proportionaliter ſecat arcus concentricos in ſemicirculo ductos; Atqui haec Rhodonea eſt *ex coroll. 2. & 3. prop. 12. primae partis*, ergo illa eſt Cloelia ſecundae deſcriptionis, juxta eandem rationem determinata; Quod erat &c.

Corollaria.

I. Hinc ſemifolium Rhodoneae cujuſvis BR*r*F ad ſuam Cloeliam PS*s*F, etiam in ſuperficie portionis hemiſpherio minoris deſcriptam, de hac enim pariter procedit propoſitio, eſt, ut alia quaelibet Rhodonea BIF ad Cloeliam ſibi correſpondentem PGF; nam Rhodonea BRF ad Rhodoneam BIF eſt in ratione *a* ad *b* quam obſervat quilibet arcus

NR

NR ad NI, vel TS ad TG, adeoque ut Cloelia PSF ad Cloeliam PGF, unde permutando conſtat propoſitum.

II. Semifolium Cloeliae ſecundariae hemiſpherio inſcriptae eſt ad duplum ſegmenti circularis quadrantis maximi a chorda PE, quae a polo ad marginem baſis hemispherii ducitur, reſecti, ut *a* ad *b*.

III. Et quia in eadem ratione *a* ad *b* erit arcus FD interceptus a meridiano PDB, Cloeliam PSF in P tangente, ad quadrantem FDE, ſive ſector ſuperficiei ſphericae dictam Cloeliam circumſcribens, ad quadrantem hemiſphericae ſuperficiei, qui circumſcribitur primariae Cloeliae PGF, erit etiam reliquum trilineum PSFD ad trilineum PGFDE, quartam ſcilicet partem Veli Florentini, aut illi aequale quadratum radii BE, ut *a* ad *b*; Ideſt facta BK ad BE, ut *a* ad *b*, erit trilineum illud PSFD aequale rectangulo EBK.

Scholion.

Nonnulla alia circa ejuſmodi Cloelias demonſtranda occurrerent, ſed taedium mihi moleſtiſſimum figuras nimis intricatas delineandi jam ultra non patitur quae amoeniſſimo Veri, ejuſmodi Florum foecundo, ſuccedit aeſtivae tempeſtatis torrida conſtitutio, delicatioribus hiſce germinibus plus nimio inimica; itaque ex Horto in Tablinum, ſeu Muſaeum Geometriae me recipio, indeque mihi Xenium comparo hiſce Floribus adjungendum, ut perſe exile, ac ſterile munus, utiliori hoc auctário cumulatum, dignius evadat, quod Excellentiſſimae Heroinae oculis, mentique ſagaciſſimae, ad ſumma quaevis contemplanda natae, offeratur.

Digitized by Google

APPENDIX

CONSTRUCTIO NOVI EXPEDITISSIMI

MESOLABI

Pro facili practica inventione duarum mediarum continuè proportionalium inter duas datas lineas.

DUM Magni Archimedis libros de Sphera, & Cylindro è Cathedra hoc anno exponerem, occaſione variorum tentaminum, quae certatim propoſita olim fuerunt, pro ſolutione famoſi Problematis Deliaci, à veteribus illis Geometris, Platone, Herone, Philone Byſantio, Apollonio, Diocle, Pappo, Sporo, Menechemo, Archita, Eratoſthene, Nicomede, apud Eutocium Aſchalonitam *Commentar. in lib.* 2. *Arch. de Spher. & Cylindr.* recenſitis,

ſubijt cupido, ut tam deſiderati, ac tam neceſſarii Problematis effectioni ſymbolam meam conferrem, excogitata alia coſtructione ad praxim expeditiſſima, quae hujuſmodi eſt.

Sint datae rectae DE, DN, (*fig.* 46.) ex quibus fiat rectangulum NDEF, illique circumſcribatur circulus DKF, ac ſtatuantur omnia in plano verticali, itaut minor ex datis rectis, velut DN fiat horizontalis, altera DE perpendicularis plano horizontis. Extenſa verò ND verſus B, ut ſit BD aequalis DH, dimidiae ſcilicet ipſius DN, erectaque perpendiculari BA, ad ipſam inclinetur ex D recta DA aequalis medietati ipſius DE, nempe DP; fixoque in A clavo affigatur filum AQ diſtentum plumbo Q, cujus longitudo ſit ſeſquialtera ipſius DE, nempe aequalis utrique ſimul AD, & DE. Mox ſtylo appoſito ad filum in B, paulatim adducatur ſtylus juxta lineam horizontalem BNI, promovendo ipſum filum, ut ſucceſſivè poſitionem accipiat ADE, AHO, ANR, AIK (tutius erit pro ſtylo acum adhibere, cujus foramini filum inſertum

ſit)

ſit) Ubi ergo plumbum Q filum diſtendens, & per E circularem aream ingreſſum, inde exire incaeperit ad punctum K, hoc ipſum ſignetur in circumferentia; nam ducta KL parallela ipſi DN, erunt KL, EL mediae quaeſitae inter datas ED, DN. Quod fuerat inveniendum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AI cum IK aequatur AD cum DE, ablatis aequalibus IK, & DL, fit AI aequalis AD cum LE; ergo quadratum AI, ſeu complexum ex quadratis AD, & DI, & duplo rectanguli IDB, aequabitur quadratis AD, LE, & duplici rectangulo ex AD in LE: dempto autem communi quadrato AD, fiet quadratum DI cum duplo IDB, ſive cum IDN, nam DN eſt dupla BD, aequale quadrato LE cum duplo AD in LE, ſive cum DEL, ob DE duplam DA; quadratum autem ID aequatur rectangulis IDN, & DIN, ergo juncto iterum IDN, fient duo rectangula IDN

cum

cum DIN, ſive duo rectangula K L M cum LKM, aut cum VLK, aequalia quadrato D I cum IDN, ſive quadrato L E cum DEL, hoc eſt duplo quadrato LE cum DLE; & ablatis aequalibus rectangulis V L K, D L E, remanebunt duo rectangula KLM duobus quadratis LE aequalia, & unum uni aequabitur; & ideo LK ad LE eſt ut LE ad LM, ſive ad datam DN; & rurſus quadrato LE addito rectangulo DLE, & rectangulo KLM, quod aequat LE quadratum, addito quadrato LKM, quod aequatur VLK, vel DLE, fiet rectangulum DEL aequale quadrato L K; ideoque etiam DE ad L K eſt ut L K ad L E; Quare DE, LK, EL, DN ſunt continuè proportionales. Quod erat demonſtrandum.

Notari autem meretur, curvam QEOK à pondere Q tali motu deſcriptam eſſe hyperbolam aequilateram, cujus axis eſt duplus ipſius A B; Unde hinc habetur facilis, & expeditus modus hyperbolam deſcribendi; Nam ordinata qualibet O S, ſi ponatur utraque Q T, & X T aequalis A B; quoniam A H cum H O

aequa-

aequatur A Q, demptis aequalibus HO, B S, erit A B, vel T Q, cum S Q, ideſt T S, aequalis A H, adeoque quadratum T S, nempe rectangulum X S Q cum quadrato T Q aequabitur quadratis B H, & A B, ſive O S, & T Q; unde ablato communi quadrato T Q, remanebit rectangulum X S Q aequale quadrato ordinatae O S, & ideò punctum O eſt ad hyperbolam aequilateram, cujus axis X Q duplus ipſius A B.

Similiter quodvis aliud punctum in eodem filo acceptum inter Q, & B, quod inſerta tenui margarita, aut nodo alterius coloris, aliove conſpicuo ſigno diſtinguere poſſumus, eandem hyperbolicam curvam deſignabit, ſola poſitione a priori differentem, imo in parallelo ſitu ſupra ipſam collocatam: idque quamdiu infra rectam B I deſcriptio conſiſtet; nam ubi emerſerit punctum illud curvam deſcribens ſupra horizontalem B I, manifeſtum eſt, quod continuato eodem motu arcum circularem circa centrum A deinceps deſcribet.

Hinc

Hinc omne prorſus Problema ſolidum, ut Anguli Triſectio, Spherae Diviſio per planum axi normale in partes datae rationis, Cubi Duplicatio &c. hac una ſimpliciſſima operatione, ſive effectione mechanica facillimè ſolvi poteſt; Quodlibet enim ſolidum Problema interſectione hyperbolae, uti & alterius cujuſvis ſectionis Conicae datae ſpeciei, cum circulo expediri poteſt, ut Geometris notum eſt.

AP-

APPROBATIONES.

DOminus Marcus Antonius de Mozzis Canonicus Florentinus, & in Publica Florentina Univerſitate Lector videat, an in hoc libro cui titulus, *Flores Geometrici* &c. quid ſit, quod imprimendum impediat. Dat. ex Archiepiſcopali Palatio 1. Julii 1728.

Horatius Mazzei Vic. Gen.

Librum cui titulus, *Flores Geometrici* &c. de mandato Dominationis Tuae Illuſtriſſimae, & Reverendiſſimae, incredibili cum animi mei voluptate, attente expendi; nihilque in eo reperire potui, quod Sanctae Fidei puritati, proborumque morum integritati, adverſetur; quin potius authoris ferax ingenium, doctrinamque ſingularem, vehementer ſum admiratus; qui naturae, ſecretiſſima, in Floribus gignendis, arcana, per difficillimas, & infrequentes Geometriae vias, facillimè eſt perſcrutatus, adeoque Flores ipſi, qui prius fuerant vanum mulierum ornamentum, breviſq; temporis ludibrium, nunc lineis, circuliſque mathematicis ornati, atque ſuffulti, nobiles Geometrarum, ac Philoſophorum deliciae, & immortalitatis exemplum, mirabiliter evaſere. Proindeque librum iſtum, omni peculiaris doctrinae genere inſtructum, publica non minus luce, quam laude dignum cenſeo.

Marcus Antonius Mozzius Canonicus Florentinus, & in Florentina Univerſitate Publicus Etruſcarum Literarum Profeſſor.

Attenta ſupradicta relatione imprimatur

Horatius de Mazzeis Vic. Gener.

Ordine

Ordine, & Commiſſione Reverendiſs. P. M. Vincentii de Comitibus Ord. Min. Conv. Inquiſit. Gener. S Off. Flor. Dom. Comes de Felicibus videat hunc praeſentem librum, cui titulus *Flores Geometrici* Reverendis. Patris D. Guidones de Grandis Abb. S. Michaelis in Burgo Piſarum, & referat an poteſt typis mandari.

Dat. in S. Off. Flor. die 11. Julii 1728.

Mag. F. Joſeph Maria Peſenti Min. Conv. V. Gen. S. Off. Flor.

Reverendiſſime Pater.

Perlegendo opus hoc praeſtantiſſimum, cui titulus inſcribitur, *Flores Geometrici*, excogitatum a Reverendiſs. Dom. Guidone Grando Cremonenſi, in almo Piſarum Lyceo Publico Matheſeos Profeſſore, nec non Academiae Botanicae Florentinae Socio, nihil in eo a Catholica Fide, boniſque moribus alienum adnotavi: quinimo incomparabilem Autoris doctrinam ſum expertus, ex qua ſcientes Viri ſummam utilitatem cum delectatione conjunctam capere poſſunt; ideoque cenſeo dictum opus publica luce dignum.

Joannes Baptiſta Felici.

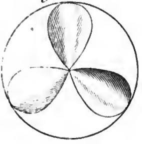
Attenta ſupradicta relatione imprimatur

M. F. Joſeph Maria Peſenti Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Flor.

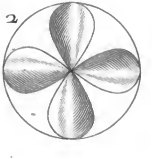
Phil. Bonarota &c.

A01 1462234

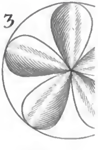
Fig 1



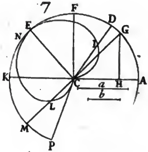
2



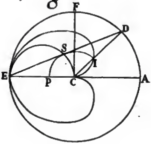
3



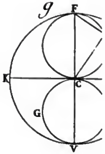
7



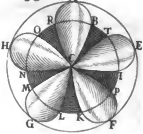
8



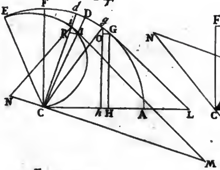
9



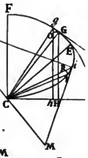
13



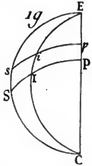
14



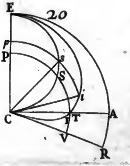
15



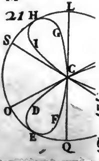
19



20



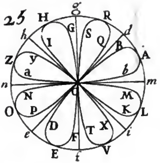
21

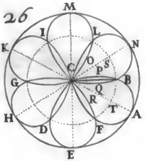


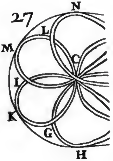
VITTORIO EMANUELE

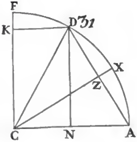
Digitized by Google

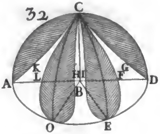
Digitized by Google

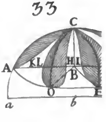

25
g
H
R
h
d
G
S
Q
I
B
A
Z
y
a
b
n
m
N
M
O
p
K
L
D
X
T
e
i
F
E
t
V

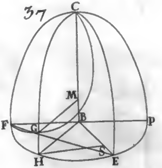

26
M
I
L
K
N
C
O
P
S
G
B
Q
H
R
T
A
D
F
E

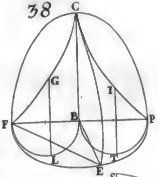

27
N
L
M
C
I
K
G
H

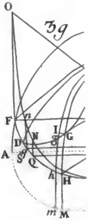

F
K
D 31
X
Z
C
N
A

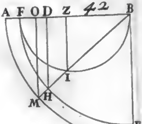

32
C
K
L
G
A
HI
F
D
B
O
E

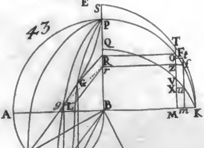

33
C
A
KL
HI
B
O
E
a
b


37
C
M
B
F
G
P
H
S
E


38
C
G
I
B
F
P
L
E
T


O
39
F
n
I
G
N
D
A
S
g
Q
h
H
m
M


A F O D Z 42 B
I
H
M
E
K


43
S
P
Q
T
F
t
R
r
O
z
y
G
V
X
u
A
g
L
B
M
m
K
D
Y
I
i
h
H
E


S
F
f
P

37.G.20

Digitized by Google